Årg. 35:3 Sept. 1952

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

TREDJE HÄFTET

Olof Hanner, Vad är topologi? I 157
Torsten Wilner, En enkel apparat för mikrofotografering 165
Göran Leide och Nils Åslund, En metod att demonstrera växelströmsförsök med glimlampor 169
Karin Aurivillius, Analysvågen II 173
Agne Wahlgren, Ekvationer med rationella rötter 183
Gösta Danielsson, Ett åskådligt bevis för Pythagoras' sats 192
Bertil Englund, En apparat för elektrolys av saltsyra 192
Bokanmälningar: Malmquist-Stenström-Danielson, Matematisk analys II; Broman, Berömda matematiska problem; The Teaching of Trigonometry in Schools; Hamburger-Grimshaw, Linear Transformations in n-Dimensional Vector Space; Bouligand-Rivaud, L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes; Durand, Sur les cercles bitangents à la parabole; Cell, Analytic Geometry; Eckman, Industrial Instrumentation; Gregg-Hammond-Frost, A Manual of Electric Measurements; Stout, Basic Electrical Measurements; Pflier, Elektrische Messgeräte und Messverfahren; Ruiter, Modern Oscilloscopes; Davy, Industrial High Vacuum; Starling-Woodall, Physics; Candler, Modern Interferometers; Chesterman, The Photographic Study of Rapid Events; Kosmos, bd 29; Evermark, Mekanik och hållfasthetslära; Dull-Idelson, Elektricitetslärans grunder; Pauling, Allmän kemi; Bull, Physical Biochemistry 193
Recensenter i detta häfte 211
Red., En vädjan 211
Gradualavhandlingar (autoreferat): Inga Fischer, Studies of the Hydrogen Bond and the Ortho-Effect; G. Lindström, Nuclear Resonnance Absorption etc. 211
Problemavdelning:
Matematiska problem (red. av S. Bågman) 215
Resultat av pristävlan 1951 218
Volymen av en tetraeder (C. E. Blom) 221
Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövning efter studentexamen aug.-sept. 1952 223
Tidskrifter, innehållsöversikt (213); Insänd litteratur (annonsblad vid s. 196)
Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Grave; Intram AB; Lindståhls bokhandel (bilaga); Natur & Kultur; Nordstedt & Söner (två annonssidor); Olympia skrivmaskiner; Philips; Svenska Bokförlaget.

Pris pr år kr. 12:50 pr häfte kr. 3:50

matematiker, fysiker, kemister

har nu fått sin egen **OLYMPIA**

Olympia SM 2 — ett av de ledande (skrivmaskins)märkena i landet och sålt i åtskilliga tusental exemplar — tillverkas vid Tysklands största skrivmaskinsfabrik, Olympia Werke West GMBH, Wilhelmshafen, Västtyskland.

Nu kan Ni också få Er Olympia SM 2 med matematiska, fysikaliska och kemiska skrivmaskinstecken. Det är en liten maskin med en stor maskins alla förnäma egenskaper och med den kan Ni ta upp till 12 kopior.

Olympia-maskinerna finns i 97 av världens länder — i Sverige genom

SVEN AHLSTEDT

Aktiebolag

Västra Trädgårdsgatan 4, Stockholm

Telefoner: 202232, 202263, 202265

Bilaga: Lindståhls bokhandel. Upplysningar om Elementa, se annonsblad vid sid. 196.

Till Elementas abonnenter

I slutet av föregående år utsändes till skol- och stadsbibliotek, institutioner m. fl. ett kort för inventering av liotekens innehav av Elementa-årgångar. Vid denna inventering, som snart är slutförd, ha många begagnat fället att fylla sina luckor, vilket delvis kunnat ske genom byte.

Förrådet av tidigare årgångar är litet, och red. ansåg det angeläget att i första hand ge biblioteken tillfälle komplettering. Nu vänder sig red. till tidskriftens enskilda abonnenter.

Ifyll omstående lista och insänd den till red. och meddela Edra önskningar. I de tidigaste årg. finnas åtskilliga kor, men fr. o. m. årg. 14 (1931) äro årgångarna fullständiga. Angående priser hänvisas till annonsbladet ll sid. 196 i detta häfte. Porto tillkommer. Även enstaka häften kunna tillsvidare erhållas.

Angiv på inventeringslistan om Ni önskar *innehållsregister* till årg. 1—16 och 17—24 (reg. finns ej till senare g.) Dessa register sändas Eder *gratis* (i mån av tillgång). Tag del av deras innehåll. Ni kommer att finna kvilligt av intresse och nytta för Eder och Eder undervisning.

Stockholm i september 1952

Red. av Elementa

Vänd!

Meddelande från .....

om innehav av tidskriften Elementa .....

Anvisning: Om *hela* årg. finns, sätt en bock i kolumn (a), om årg. är ofullständig, angiv i kolumn (b) de häft som finnas (t. ex. 1, 2, 4). — Alla årg. bestå av fyra häften; fr. o. m. årg. 14 står årg.:s *nummer* överst till vänst på omslaget, tidigare (i bokstäver) mitt på sidan.

Årg.	a	b	Årg.	a	b	Årg.	a	b	Årg.	a	b	Årg.	a	b
1			7			13			19			25		
2			8			14			20			26		
3			9			15			21			27		
4			10			16			22			28		
5			11			17			23			29		
6			12			18			24			30		
												31		
												32		
												33		
												34		
												35		

Dupletter finnas av följande årg. (angiv årg.-s nr, ej tryckår): .....

.....

.....

.....

1952

Var god sänd *gratis* / sänd ej register till årg. 1—16 o. 17—24

Snart fullbordat!

MATEMATISK ANALYS

I—III

Huvudredaktör: *Prof. J. Malmquist*

Band III: Variationskalkyl, Fourierska serier, partiella differentialekvationer, integralekvationer. Inb. 74:—

Utkommer i december!

Band I: Differential- och integralkalkyl. Inb. 70:—

Band II: Analytiska funktioner. Inb. 72:—

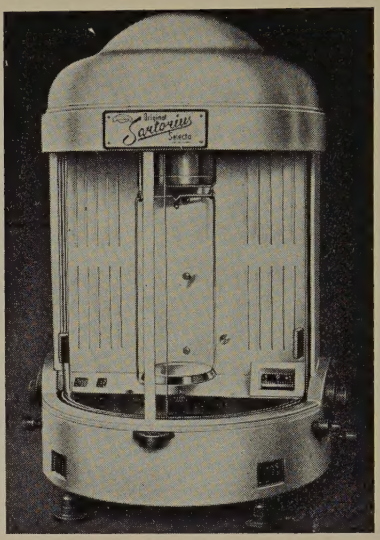
»Utgivandet av en så omfattande lärobok på svenska är uppenbarligen en händelse av allra största betydelse för den matematiska undervisningen i Sverige.»

Docent *Hans Rådström* i Elementa.

NATUR OCH KULTUR

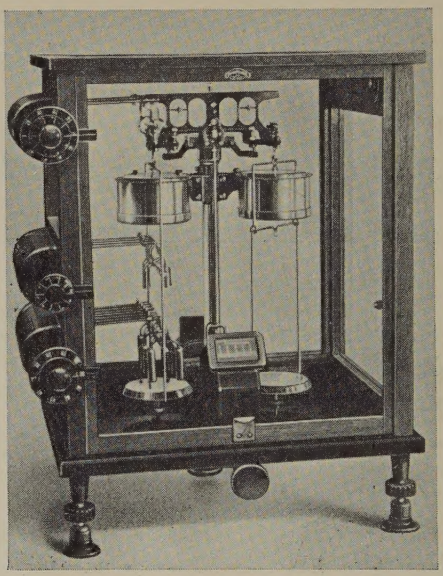
SARTORIUS-WERKE A.G. GÖTTINGEN

Tysk
originaltillverkning



SELECTA analysvåg.
Max. belastning 200 g.
Känslighet 1/10 mg.

SELECTA semi-mikrovåg.
Max. belastning 100 g.
Känslighet 1/100 mg.



TYP J I
Automatisk påläggning av samtliga vikter.
Max. belastning 200 g.
Känslighet 1/10 mg.

Generalagent:

RUDOLPH GRAVE A/B

Stockholm 3

Vad är topologi? I.

av fil. lic. Olof Hanner, Stockholm

En av den moderna matematikens grenar benämnes topologi. Författaren avser att med två artiklar, varav detta är den första, ge en liten inblick i vad topologin sysslar med.

Topologin kan på ett naturligt sätt indelas i två delområden, ehuru gränsen dem emellan inte är skarp. Den ena delen, som vi skall syssla med i denna första artikel, behandlar enkla geometriska figurer såsom linjer, kvadrater, ringar m. m. Den andra delen är en rent abstrakt vetenskap och saknar helt eller delvis åskådligt underlag.

När topologin behandlar enkla geometriska figurer, är den ett slags geometri. Den får emellertid sin särprägel genom det sätt på vilket den behandlar dessa figurer. Man tillåter nämligen en figur att deformeras och uppfattar den ändå som väsentligen samma figur. Man kan beskriva dessa deformationer sålunda: Man uppritar figuren på en skiva gjord av något elastiskt material. Därefter utnyttjar man elasticiteten och tillåter att skivan drar ihop sig eller uttöjes. Därvid förvanskas figuren. Är den en cirkel blir den kanske en ellips, är den en kvadrat kanske en rektangel eller en romb, för att nu nämna ett par enkla exempel. Nu studerar man inom topologin endast sådana egenskaper hos originalfiguren, som står sig vid dylika deformationer, egenskaper, som finns hos den ursprungliga figuren och finns kvar hur mycket man än deformerar den. Man har karakteriserat topologin som »gummibandsgeometri».

En cirkelsektor kan t. ex. genom deformation (fig. 1) töjas ut, så att den får större vinkel (den fälls ut som en solfjäder), eller större radie, eller så att den inte längre är någon cirkelsektor. Vi ser genom detta exempel, att varken en sträckas längd eller en vinkels storlek, båda av så stor betydelse i den euklidiska geometrin, kan vara av intresse inom topologin.

En cirkelsektor. Samma cirkelsektor deformerad på tre sätt.

Fig. 1.

Tag mittpunkten *B* på en sträcka *AC*. Deformera sträckan, t. ex. så som fig. 2 anger.

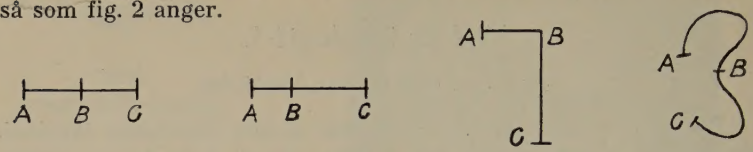


Fig. 2. Olika deformationer av en sträcka.

B behöver inte längre vara mittpunkten, ja sträckan kan gå över i en krokig kurva. Men en sak står sig: *B* ligger hela tiden »mellan» *A* och *C*, dvs. det är omöjligt att på kurvan komma från *A* till *C* utan att passera *B*. Detta kan också uttryckas så: borttages punkten *B*, blir figuren inte längre sammanhängande utan sönderfaller i två delar.

Låt oss ta ett annat exempel, det s. k. Königsbergproblemet. I Königsberg fanns, då problemet uppstod, 7 broar fördelade som figur 3 visar. Problemet är att gå en promenad över alla 7 broarna utan att passera någon bro mer än en gång.

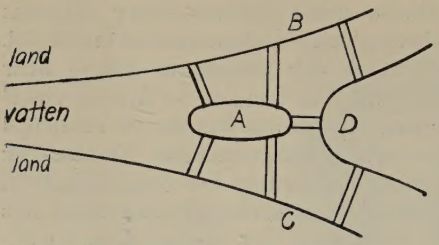


Fig. 3. De sju broarna i Königsberg.

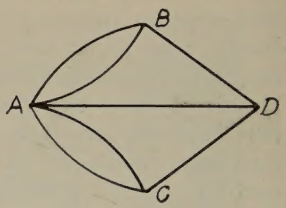


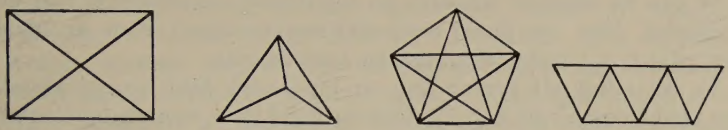
Fig. 4. Broproblemet schematiserat.

Problemet är olösligt. Det går inte att finna någon sådan promenad. Orsaken är denna: Ett landområde, där promenaden varken börjar eller slutar, måste ha ett jämnt antal brofästen, ty varje gång man använder en bro för att komma dit, måste man ju också använda en för att komma därifrån. Detta gäller för alla landområden utom två: det, där promenaden börjar och det, där den slutar (såvida det inte är samma land, i vilket fall det gäller för alla). Nu finns i figuren ovan fyra landområden, alla med udda antal brofästen; ön har 5, de övriga 3. Alltså är problemet olösligt.

Låt oss, som Euler gjorde i sin behandling av detta problem, skala bort allt överflödigt. Vi ersätter varje landområde med en punkt och varje bro med en kurva mellan motsvarande punkter (fig. 4). Problemet kan då formuleras så: Är det möjligt att upprita

denna figur med ett penndrag, dvs. så att pennan aldrig släpper papperet eller genomlöper någon kurva mer än en gång? Detta är omöjligt av samma skäl som förut. Var och en av de fyra punkterna *A*, *B*, *C*, *D* i figuren är ändpunkt för ett udda antal kurvor.

Ytterligare några exempel anges i fig. 5.



Dessa kan inte uppritas med ett penndrag. Fig. 5. Dessa kan uppritas med ett penndrag.

Den bild vi hittills har av topologin, som en »gummibandsgeometri», är åskådlig men inte fullt korrekt. När man använder ord som töjning, sammandragning, deformation el. dyl., tänker man sig en process, som försiggår successivt. Figuren förändras successivt från den ena formen till den andra. Emellertid är man i topologin i allmänhet inte intresserad av annat än första läget och sista läget. Låt oss förklara detta genom att införa ett begrepp, som är fundamentalt för hela topologin: den topologiska avbildningen.

Först ett exempel. Antag att vi har en karta över norra halvklotet. Kartan tänkes erhållen från halvklotet genom deformation; halvklotet förminskas och plattas till. Emellertid är denna deformation rätt ointressant. Vad som är av intresse är blott, att kartan är en bild, som återger halvklotet.

Vi har här ett typiskt exempel på en topologisk avbildning, kartan säges vara en topologisk bild av den ursprungliga halvsfären, det norra halvklotet. Härvid är två egenskaper att iakttaga. Den ena är att bilden återger föremålet punkt för punkt. För varje punkt på halvklotet finns en motsvarande punkt på kartan, och omvänt svarar varje punkt på kartan mot en punkt på halvklotet. Detta uttryckes genom att man säger, att kartan är en »enentydig» bild av halvklotet.

Den andra egenskapen är den s. k. kontinuiteten. Vi tillät inte i vår tidigare »gummibandsgeometri», att det elastiska materialet fick klippas eller skäras sönder. Detta får nu sin stränga matematiska formulering i kontinuiteten. Den innebär att punkter, som ligger »nära» varandra på originalföremålet (halvklotet), måste ligga »nära» varandra även på bilden (kartan). Ett sätt att uttrycka den exakt är så: Om man på föremålet genom en följd av punkter närmar sig en punkt *A*, så skall bildpunkterna närma sig punkten *A*:s bildpunkt. Att märka är att kontinuiteten gäller även i andra

riktningen, från kartan till halvklotet, ty punkter, som ligger nära varandra på kartan, svarar mot punkter, som ligger nära varandra på halvklotet. Därför säges avbildningen vara kontinuerlig i båda riktningarna, dvs. både från föremålet till bilden och från bilden till föremålet.

Vi kan nu allmänt definiera en topologisk avbildning såsom en avbildning (dvs. en punkt-för-punkt-motsvarighet), som är både enentydig och i båda riktningarna kontinuerlig.

Vi såg alltså att kartan var en topologisk bild av halvklotet. Men med samma rätt kan vi uppfatta halvklotet som en topologisk bild av kartan, ty de båda villkoren, enentydigheten och kontinuiteten, är ju uppfyllda i båda riktningarna. Detta gäller allmänt. Man behöver alltså inte strängt skilja på föremål och bild vid en topologisk avbildning, man säger kort och gott, att de båda är topologiskt ekvivalenta. Fig. 1 visar sålunda fyra topologiskt ekvivalenta figurer; uttages godtyckligt två av dem, kan den ena av dessa uppfattas som en topologisk bild av den andra.

Låt oss nu starta med en cirkel (dvs. själva cirkelperiferin) och ta olika topologiska bilder av denna (fig. 6).

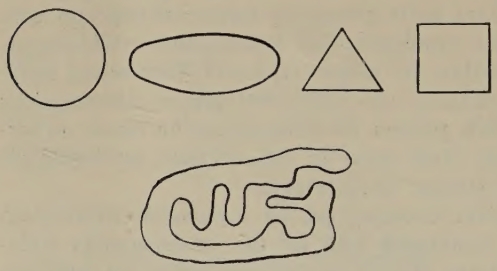


Fig. 6. En cirkel och plana topologiska bilder av denna.

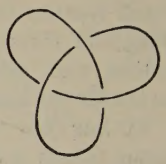


Fig. 7. En knut, en icke plan topologisk bild av en cirkel.

Vi kan också återge cirkeln som en icke plan figur, t. ex. som en knut (fig. 7).

Vill vi tänka oss cirkeln som en gummisnodd, så kan vi genom att deformera denna få alla figurerna i fig. 6. Vi kan däremot inte få fig. 7 (ehuru detta är rätt besvärligt att bevisa strängt). För att få den sistnämnda fordras följande knep. Vi klipper sönder snodden på något ställe och formar figuren, varvid de båda ändarna, som uppstod vid klippet, kommer att ligga intill varandra. Dessa ändar klistrar vi ihop. För varje punkt på den ursprungliga snodden svarar nu efter hopklistringen en bestämd punkt på den knutna, och efter hopklistringen kommer punkter som ursprung-

ligen låg nära varandra åter att ligga nära varandra. Knuten är således en topologisk bild av cirkeln.

Vad som är av intresse inom topologin är sådana egenskaper hos figurerna, som står sig vid topologisk avbildning, dvs. sådana som, om de finns hos en figur, också finns hos alla topologiska bilder av densamma. Sådana egenskaper kallar vi topologiska egenskaper. Vi har redan mött ett par sådana. Den egenskapen hos en sträcka, att den blir osammanhängande om en (lämpligt vald) punkt borttages, är topologisk. Likaså egenskapen hos en figur bestående av kurvor att kunna uppritas i ett penndrag.

Låt oss plocka fram några enkla topologiska egenskaper hos cirkeln, egenskaper alltså, som finns hos samtliga figurer i fig. 6 och fig. 7. Först och främst är cirkeln sammanhängande, dvs. det är möjligt att på cirkeln komma från vilken punkt som helst till vilken punkt som helst. Hittills har alla figurer varit sammanhängande. Ett exempel på en icke sammanhängande figur är den, som består av två icke skärande cirklar (fig. 8).

Fig. 8. Tre topologiskt ekvivalenta figurer.

Fig. 9. Cirkelskiva med två borttagna punkter (+).

Vidare är cirkeln sammanhängande även om en punkt tages bort. Härigenom skiljer den sig från en sträcka, som ju kan delas genom borttagande av en punkt. Däremot blir cirkeln inte sammanhängande, om två punkter borttages. Jämför med en cirkelskiva (fig. 9), där ju alltid två punkter kan sammanbindas även om två punkter tas bort.

Om två figurer inte har samma topologiska egenskaper, kan de inte vara topologiskt ekvivalenta. Vi ser således, att en cirkel varken är topologiskt ekvivalent med två cirklar, med en sträcka eller med en cirkelskiva.

Vi kan också skilja cirkeln från sträckan genom en annan topologisk egenskap. Tag i ett plan en topologisk bild av en cirkel (t. ex. sista figuren i fig. 6). Denna bild delar planet i två sammanhängande områden. Det finns ett »utanför» och ett »innanför», och man kan inte förbinda en punkt utanför kurvan med en punkt innanför utan att skära kurvan. Detta är innehållet i den s. k. Jordan's kurvsats. Den förefaller kanske inte särskilt märkvärdig,

men är svår att bevisa strängt. Den ger en topologisk egenskap hos cirkeln: Varje i ett plan belägen topologisk bild av den delar planet. Däremot kan en topologisk bild av en sträcka inte dela planet.

I detta sammanhang kan följande problem nämnas. Givet tre hus *A*, *B* och *C* och tre verk, elverket, vattenverket och gasverket. Från alla tre verken skall till alla tre husen dragas ledningar, sammanlagt 9 stycken. Det är inte tillåtet att draga en ledning över eller under en annan ledning. Jämför fig. 10 där 8 av ledningarna är dragna. Den nionde, elledningen till *C*, kan inte dragas utan att den korsar någon redan befintlig ledning. Orsaken är den, att vatten- och gasledningarna till *A* och *B* (försedda med tvärstreck i fig. 10) bildar en sluten kurva, dvs. en topologisk bild av en

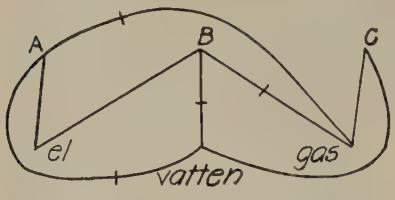


Fig. 10. Åtta ledningar till tre hus.

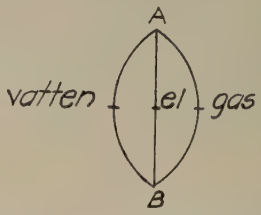


Fig. 11. Sex ledningar till två hus.

cirkel, varvid elverket ligger innanför och huset *C* utanför. Genom samma argumentering, som bevisar Jordan's kurvsats, kan man visa, att de 6 ledningarna till husen *A* och *B* måste dela planet i tre delar, på samma sätt som i fig. 11.

I vilket av de tre områdena huset *C* än ligger, kan två av ledningarna dragas till det men inte den tredje. Problemet är således olösligt, 8 av ledningarna kan dragas men inte alla 9.

Drager man den nionde ledningen under eller över någon annan ledning och alltså släpper på kravet att ledningarna skall ligga i ett plan, erhåller man en figur i rymden med följande intressanta egenskap: Ingen topologisk bild av den kan vara belägen i ett plan.

De exempel vi hittills betraktat har mestadels bestått av linjer och kurvor i planet eller rymden. Låt oss studera några ytor. Ett exempel har vi redan sett, norra halvklotet, som är topologiskt ekvivalent med en plan cirkelskiva. Hela jordytan, alltså en hel sfär, är emellertid inte topologiskt ekvivalent med någon plan figur. Det är omöjligt att upprita en plan karta över hela jordytan.

För att kunna återge en sfär eller någon mera komplicerad yta på ett plan tillgriper man knepet att klippa sönder ytan i mindre

stycken. Så t. ex. kan man dela jordytan vid ekvatorn i norra och södra delen och återge norra delen på en cirkelskiva och södra delen på en annan cirkelskiva. Ekvatorn kommer därvid att återges två gånger på kartan, som bildas av de båda cirkelskivorna. Det är alltså inte fråga om en enentydig återgivning; en punkt på ekvatorn svarar ju mot två punkter på kartan. Kartan är alltså inte heller en topologisk bild.

För att återfå sfären från de båda cirkelskivorna måste man tänka sig de båda cirklarna som svarar mot ekvatorn som en och samma. Man säger att man identifierar dem. Åskådligt svarar detta mot en hopklistring. Av två cirkulära gummiskivor kan man erhålla en boll genom att klistra ihop kanterna och blåsa upp.

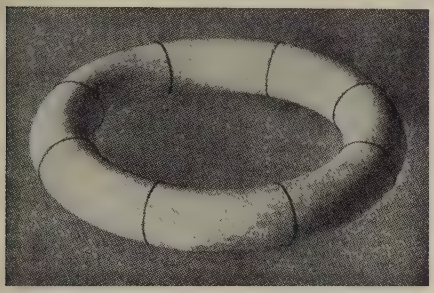


Fig. 12. En torus.

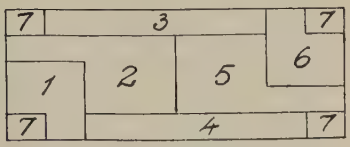


Fig. 13. Identifieras motstående kanter, erhålles en torus.

En torus är ytan av en vanlig solid ring (se fig. 12). Vill vi tänka oss den gjord av gummi, kan vi ta innerslangen på ett vanligt pneumatiskt gummihjul. Klippes denna slang tvärs av, uppstår ett gummirör, som kan formas till ett cylindriskt rör. Uppklippes detta längs en generatris, kan den utbredas på ett plan i form av en rektangulär remsa.

På en torus kan man finna 7 sammanhängande områden, som parvis gränsar till varandra (dvs. »alla gränsar till alla»); se fig. 13. För att i fig. 13 erhålla torusen skall man både indentifiera långsidorna (därigenom kommer t. ex. området 3 att gränsa till området 4) och identifiera kortsidorna (så att t. ex. området 1 gränsar till området 6). De fyra områden, som äro märkta 7, blir vid identifikationen ett enda område.

På en sfär (eller i ett plan) kan man däremot finna högst 4 områden som parvis gränsar till varandra. Denna skillnad visar för övrigt, att torusen och sfären inte är topologiskt ekvivalenta.

Man kan också starta med ett eller flera ytstycken och genom att angiva hur vissa kanter skall identifieras definiera den önskade

ytan. Låt oss använda detta för att definiera en yta, kallad Möbius' band, som uppvisar vissa säregna drag (fig. 15). Den erhålles genom att kortsidorna på ett rektangulärt band identifieras så som fig. 14 anger. Sträckan A_1D_1 skall identifieras med A_2D_2, så att A_1 identifieras med A_2, B_1 med B_2 osv. Tag t. ex. ett pappersband och för ihop ändarna, vrid om ena änden och klistra ihop.

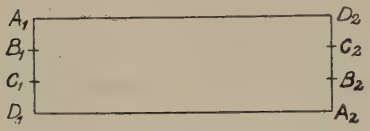


Fig. 14. Kortsidorna identifieras (se texten).

Fig. 15. Möbius' band.

Denna yta är inte orienterbar. Därmed menas följande. Tag på ytan en liten cirkel med angiven omloppsriktning, se fig. 16 vid E. Låt denna cirkel röra sig, som angives i fig. 16, till lägena F, G, H och tillbaka till E. Den har då fått motsatt omloppsriktning.

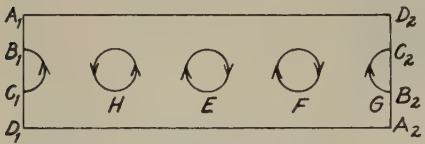


Fig. 16. Möbius' band är ej orienterbart.

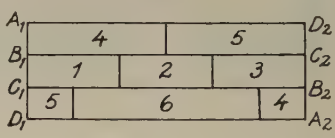


Fig. 17. Sex till varandra gränsande områden på Möbius' band.

Att vara »icke orienterbar» är en topologisk egenskap hos en yta. Planet, sfären och torusen är alla orienterbara, dvs. en cirkels omloppsriktning förändras inte hur den än flyttas. Det finns två väsentligt olika omloppsriktningar för cirklar på dessa ytor.

En cirkel med omloppsriktning kan användas för att enligt korkskruvsregeln definiera en riktning genom ytan, från den ena sidan till den andra. Att t. ex. en sfär har två väsentligt olika omloppsriktningar för varje cirkel svarar mot att den har två sidor, en utsida och en insida. Möbius' band däremot har bara en sida. Det är alltid möjligt att på vår pappersmodell dra en kurva mellan två godtyckliga punkter, även om de före hopklistringen ligger på var sin sida av papperet.

En annan topologisk egenskap hos Möbius' band är att dess kant är sammanhängande. Den består av en topologisk bild av en cirkel.

Det är på Möbius' band möjligt att finna högst 6 områden, som parvis gränsar till varandra (se fig. 17).

Enkel apparat för mikrofotografering

Av civilingenjör Torsten Wilner, Stockholm

Varje mikroskop med tillräckligt kraftig belysningsanordning kan i princip användas för projektion och fotografering. Bättre mikroskop bruka vara försedda med särskilda linssystem för detta ändamål. Om mikroskopet på vanligt sätt inställes så, att ett inlagt preparat synes tydligt, fordras endast en ganska obetydlig efterjustering för att en tydlig bild skall framträda på en mattskiva, som i mörker hålles så, att den träffas av det från synöppningen utgående strålknippet.

På denna princip grundas den enkla anordning för mikrofotografering som visas å fig. 1 och 2. Apparaten består i huvudsak av en masonitlåda (1, fig. 1 a), innehållande ett mikroskop, av vilket för enkelhets skull endast tuben (2), objektbordet (3) samt belysningsanordningen (4) inritats. Bildkvaliteten bestämmes helt av mikroskopet, och det är därför möjligt att med en anordning av detta slag i förening med ett gott mikroskop taga bilder av hög kvalitet. Även en enklare apparat kan emellertid för många ändamål ge användbart resultat. Här användes ett mycket enkelt litet mikroskop av typ »Earth», vilket före kriget kunde köpas för omkring 18 kronor. Numera finnas liknande eller kanske något bättre mikroskop att få till priser, som ligga några tiotal kronor högre.

Mikroskopet har i sitt ursprungliga utförande belysningsspegel men ej kondensor. Här har spegeln ersatts med den redan nämnda belysningsanordningen (4), vilken innehåller en liten glödlampa (5) av en numera ganska vanlig typ, där en del av lampkolven är utbildad som lins. Ytterligare ett par linser (6, med 8 mm diameter och 17 mm brännvidd) ha inlimmats i en tub av svart papper, som trätts direkt på lampan. Ljusknippet blir härigenom mycket intensivt och koncentrerat. Det hela bäres av en remsa mjuk blyplåt (7), som medger bekväm injustering av ljuskällans läge. Ström lämnas av ett ficklampsbatteri (8), och ljusstyrkan regleras medelst ett litet vridmotstånd (9) av radiotyp. En särskild fördel är att apparaten är oberoende av yttre strömkälla.

Den egentliga kameran utgöres av lådans (1) övre del, invändigt matt svartmålad. Förstoringen bestämmes av lådans dimensioner samt av mikroskopets linssystem. Vid denna enkla apparat an-

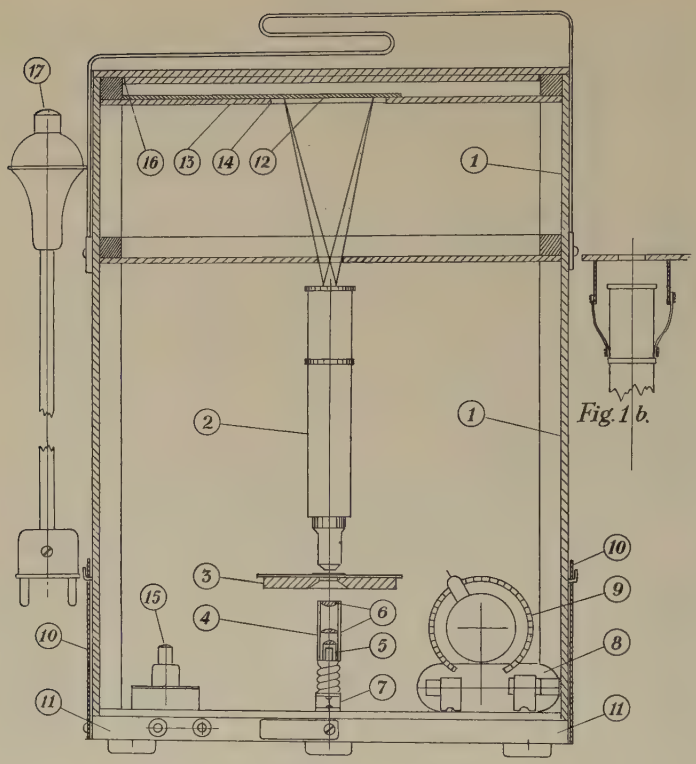


Fig. 1. Apparaten i genomskärning.
Total höjd 29 cm.

vändes alltid en och samma förstoring, 60 gånger. Skärpan hos bilden på plåten kan emellertid motivera vanlig efterförstoring vid kopieringen till totalt ett par hundratal gånger. Lådan (1) fasthålles medelst ett par fjädrande spännen (10) av gummiresår vid bottenplattan (11), på vilken de övriga delarna äro fast anbragta. När kameradelen tagits av, kan mikroskopet användas på vanligt sätt. För att icke ögonen skola skadas bör då ljusstyrkan dämpas ned.

Inställning för fotografering sker med hjälp av en visirskiva av mattglas (12), löst lagd på kamerans övre plan (13), vilket i mitten är försett med en bildöppning (14). Belysningsströmmen hålles härvid sluten genom den fasta strömbrytaren (15). Efter slutad in-

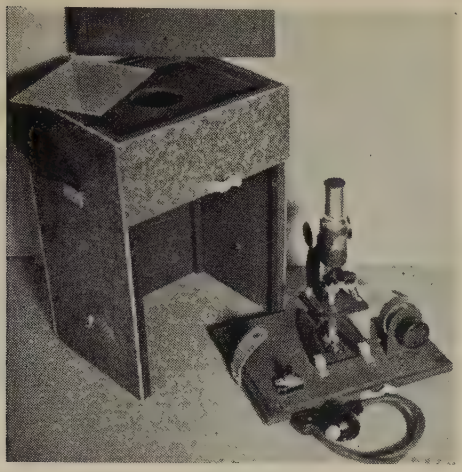


Fig. 2. Mikroskopet och kameran.

ställning släckes belysningen såväl i apparaten som i arbetsrummet, vilket bör vara mörklagt, och en fotografisk plåt (9×12 cm²) lägges in på visirskivans plats. Plåten föres fram mot något av hörnlägena. Genom flyttning av plåten kunna på detta sätt fyra olika bilder i bestämda lägen tagas på densamma. Ett löst pålagt lock med ljustätande fals (16) täcker kameran upptill. Även apparatens framparti kan täckas av ett lock, fasthållet medelst ett par mörkläggningsklämmare. Sedan apparaten slutits, kan dämpad belysning tändas i rummet.

Då apparaten ej är försedd med någon fotografisk slutare, göres exponeringen helt enkelt på så sätt, att belysningen kortvarigt tändes med hjälp av ringledningskontakten (17). Hur lång exponeringstiden bör vara beror på det undersökta preparatets täthet, belysningsintensiteten samt på plåtens ljuskänslighet. Det kan röra sig om en halv sekund upp till några få sekunder. Lämplig tid utprovas på vanligt sätt genom några olika exponeringar. Plåten framkallas omedelbart, och då arbetet lätt utföres i mörker, är särskild mörkrumsbelysning ej nödvändig. Utrustningen i övrigt är mycket enkel: ett par skålar, täckta med papplock, för framkallnings- och fixerbaden samt en hink med vatten. För att framkallningsbadet omedelbart skall väta hela plåten bör den före iläggningen doppas i vatten. Lämplig framkallningstid brukar stå angiven på preparatförpackningen. Före fixeringen doppas plåten åter i vattnet, så att den i huvudsak blir fri från framkallnings-

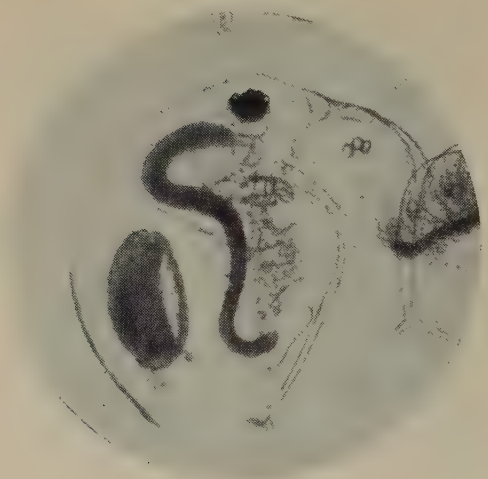


Fig. 3. Mikrofotografi av vattenloppa med ägg; ca 100 ggr förstoring.

vätska. Sedan fixerbadet hunnit verka, kan plåten granskas vid tänd belysning. Efter slutad fixering sköljes i rinnande vatten. Vattnet i hinken bytes efter varje behandlad plåt.

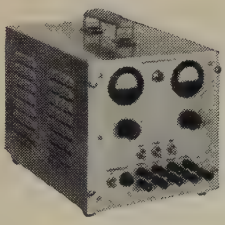
Apparatens detaljer kunna givetvis varieras för att passa olika mikroskoptyper. Finnes en kraftig mikroskoplampa med kondensorlins till hands, kan denna användas på vanligt sätt. Mikroskopets belysningsspegel bibehålles då, och lampan placeras utanför apparatlådan, lysande in genom en öppning som tages upp i väggen. Härvid kan det vara nödvändigt att anordna ljustätning mellan mikroskopet och kameran, exempelvis medelst en liten tub av ljustätt tyg på sätt som fig. 1 b visar. En vanlig billig batteridriven stavlampa med jämnt och samlat ljusknippe kan i många fall användas som mikroskoplampa.

Fig. 3 visar en bild, som tagits av ett vanligt skolpreparat med hjälp av anordningen i dess här visade mycket enkla utföringsform. Apparaten torde kunna byggas som elevarbete i fysik, men huvudintresset ligger kanske inom biologiundervisningen, där de tagna bilderna kunna förhöja värdet av de mikroskopiska demonstrationerna. Även inom kemien finnas intressanta undersökningsobjekt, exempelvis kristaller, bildade vid avdunstning av små droppar av lösningar på ett objektglas.

De som önska råd och hjälp vid tillverkning av apparaten kunna vända sig till AB P. A. Norstedt & Söner, Skolavdelningen, Stockholm.

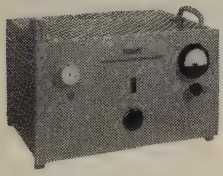
KONSTANT SPÄNNING

oberoende av belastning och nätspänningsvariationer



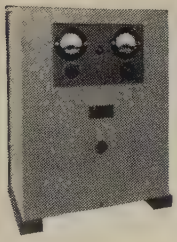
Likspänningsstabilisatorn GM 454

är utomordentligt lämplig för t. ex. laboratorier, provrum, serviceverkstäder och undervisningsanstalter. Två helt skilda, stabiliserade likspänningskretsar, båda kontinuerligt reglerbara, den ena mellan 30 och 450 V och den andra mellan 0 och 300 V. Dessutom finnas två växelspänningsuttag på 6,3 V och max. 5 ampere. Variationen vid belastningsändringar mellan 0 och 100 % av full last är maximalt 0,2 V.



Växelspänningsstabilisatorn GM 444

är helt kontrollerad av elektronrör vilket gör att den motsvarar mycket höga krav på stabilitet och kurvform vare sig det gäller belastnings- eller nätspänningsvariationer. Fordrar ingen skötsel och är användbar överallt där konstant växelspänning erfordras. Inspänning 200—240 V 50 p/s. Utspänning 220 V (med variationsmöjlighet). Belastningsområde 0—0,5 kVA, 0,5—1 kVA. Regleringsnoggrannhet i utspänningen ± 0,5 % oberoende av variationer i nätfrekvensen.

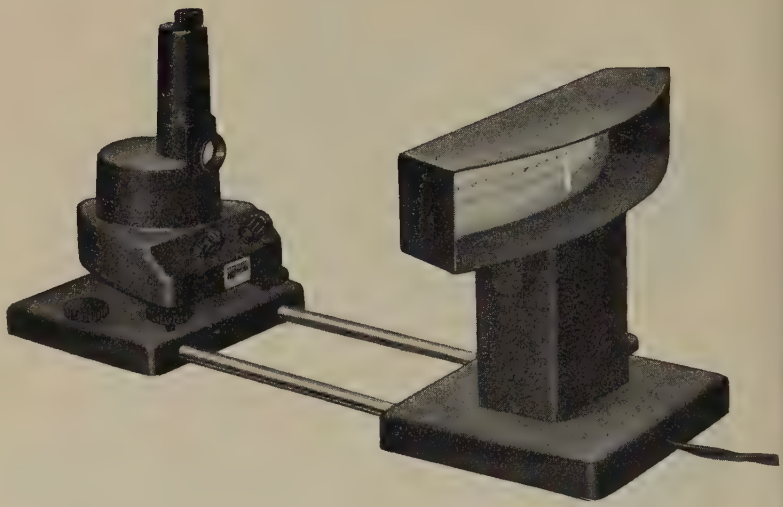


Växelspänningsstabilisatorn GM 7776

för konstanthållning av nätspänningen i laboratorier, provrum m. m. Inspänning 220 V 15 %. Utspänning manuellt variabel mellan 210 och 230 V. Belastning 2 kVA. Regleringsnoggrannhet ± 0,5 % oberoende av variationer i nätfrekvensen.

PHILIPS

Mätinstrumentavd., Stockholm 6 · Tel. 340580, för rikssamtal 340680



Spegelgalvanometer

med belysningsanordning och skala. Galvanometern kan levereras med olika inre motstånd och känslighet. Finnes även i utförande för ballistiska mätningar.

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm

En metod att demonstrera växelströmsförsök med glimlampor

Av amanuens Göran Leide och fil. stud. Nils Åslund, Lund

Den här beskrivna apparaten möjliggör en åskådlig framställning av de flesta inom skolundervisningen förekommande växelströmsförloppen.

De försök, som utföras vid undervisningen inom detta område, demonstreras som regel med glimlampor, slingoscillograf eller katodstråleoscillograf. Vid demonstration med glimlampor brukar dessa betraktas genom en roterande spegel. Spegelns uppgift är att dra ut bilden av lampan för att ljusstyrkans variation med tiden skall kunna iakttas. Bilden syns emellertid endast inom en ganska liten sektor, vilket medför svårigheter vid demonstration inför ett större auditorium. En väsentlig förbättring uppnås, om i stället glimlampan själv får rotera. Man kan för detta ändamål montera glimlampor på en propeller, driven av en motor. Med denna metod vinnes icke blott, att lamporna syns över hela klassrummet, utan också att försöket förenklas.

Visserligen kan man med glimlampa endast kvalitativt framställa växelströmskurvans form, men eftersom urladdningen är praktiskt taget tröghetsfri, lämpar den sig utmärkt, när man vill framställa fasförskjutningar av olika slag. I sådana fall kan den framgångsrikt ta upp konkurrensen med både slingoscillograf och katodstråleoscillograf. Vad beträffar driftsäkerhet, enkelhet och pris är den dessutom överlägsen dessa metoder.

Apparatens utformning framgår av fig. 1. Tre glimlampor är fästade efter varandra ytterst på en duraluminiumribba av dimensionerna $500 \times 36 \times 4$ mm. I ribbans andra ända finnes en motvikt för balansering av lampor och hållare. Ribban är fästad vid en glidlagrad axel (längd 180 mm, diam. 25 mm), vilken är försedd med sex isolerade släpringar, anslutna till lamporna. På ringarna vilar kontaktfjädrar, till vilka yttre anslutning kan ske. Till vår apparat har använts en äldre seriemotor för likström (65 W, 2000 varv/min), vars hastighet reglerats med ett seriemotstånd. De flesta motorer av ungefär samma effekt, och som tillåter bekväm hastighetsreglering, kan givetvis användas. Vid försöken har det visat sig lämpligt att använda ett varvtal på 750 varv/min. Därvid er-

Fig. 1. Glimlampor monterade på roterande propeller.

hålles 8 ljusglimtar per varv, 4 från vardera elektroden, när glimlampan matas med 50-periodig växelspänning. Glimlamporna är av den mindre typen med sockel E 14 (liten Edison), i Lumas katalog betecknad typ 3. Denna typ är försedd med inbyggt motstånd. Elektroderna består av en central platta och en perifer ring. Beroende på försökets utformning har använts lampor för 115—130 V och för 200—230 V.

Ett stort antal försök med glimlampor har beskrivits av rektor Börje Svensson i denna tidskrift, Elementa 27 (1944), s. 215. Vi nöjer oss därför med att räkna upp några försök, där apparaten med fördel kan användas:

Trefas växelspänning. (Fig. 2.)

Fasförskjutning mellan ström och spänning i växelströmskretsar med induktans eller kapacitans. (Särskilt effektfullt

Fig. 2. Demonstration av trefas växelspänning. (Bilden är tagen på 1,5 m avstånd, bländare 1 : 4,5 tid $^1/_5$ sek, plåt HP3.)

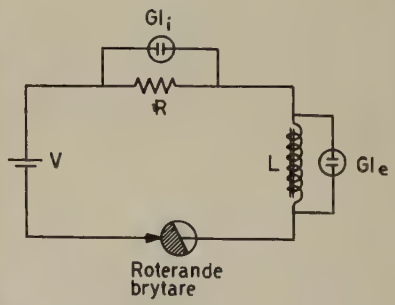


Fig. 3. Demonstration av självinduktion.

kan man framställa en kontinuerlig ändring av fasförskjutningen genom variation av kretsens ohmska motstånd.)

Spänningsresonans.

Olika försök med likriktning av växelström.

Fasförskjutningar mellan strömmar och spänningar i en transformator.

Kippsvängningar.

Dämpade elektriska svängningar.

Ström- och spänningsvariationer vid slutning och brytning av en krets med självinduktion (eller kapacitet).

Det senare försöket kan med roterande lampor ges en helt ny utformning, varigenom förloppen kan studeras mycket ingående. Kopplingen framgår av fig. 3.

Med varvtalet 750 varv/min har följande data visat sig lämpliga: V=240 V; R=5000 Ω; L: ca 450 H (Phywespole med 12 000 varv på sluten u-kärna); Gl_i och Gl_e glimlampor på resp. 115—130 V och 200—230 V.

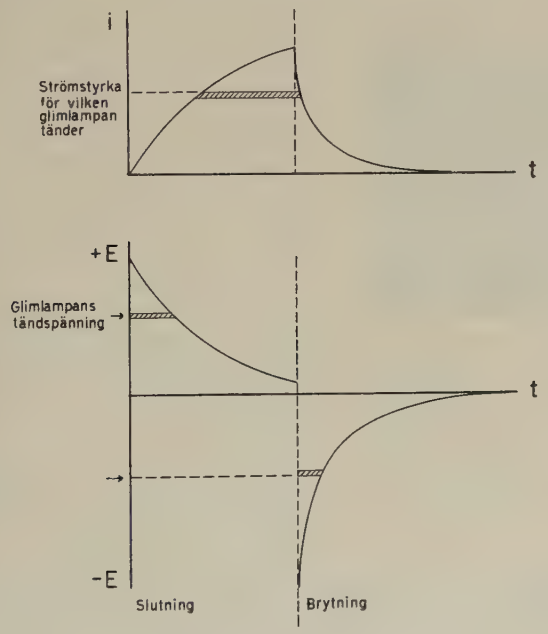


Fig. 4. Ström- och spänningsvariationer i självinduktion vid slutning och brytning.

För att få slutning och brytning att ske synkront med motorns rotation utnyttjas släpringarna till en av glimlamporna. Ledningen till lampan kortslutes och halva släpringen överklistras med tape el. dyl. Inkopplas ledningen från batteriet över fjädrarna, kommer då strömkretsen att vara sluten halva varvet och bruten halva. De två återstående glimlamporna anger ström och spänning.

Vid slutning varierar ström och spänning enligt formlerna:

$$i=\frac{V}{R_1}\left(1-e^{-\frac{R_1}{L}t}\right); \quad E=V.e^{-\frac{R_1}{L}t}$$

Vid brytning erhålles:

$$i=\frac{V}{R_1}e^{-\frac{R_2}{L}t}; \quad E=-V\frac{R_2}{R_1}e^{-\frac{R_2}{L}t}$$

Här är R_1 och R_2 totala ohmska motståndet i kretsen före resp. efter brytningen, och normalt är alltså $R_2 \gg R_1$.

Grafiskt motsvaras dessa formler av kurvorna i fig. 4. De roterande glimlamporna ger den bild av förloppet, som framgår av fig. 5. Den yttre lampan anger här spänning och den inre ström. Rotationsriktningen anges av pilen. Man ser tydligt, att spänningen har olika riktning vid slutning och brytning, och att den avtar relativt långsamt efter slutningen, medan den avtar snabbt efter brytningen. Dessutom har den ett större begynnelsevärde i det senare fallet.

Fig. 5. Ström- och spänningsvariationer vid slutning och brytning av en krets med självinduktion. Slutning sker när lamporna befinner sig till vänster, brytning när de befinner sig till höger.

Efter brytningen går strömmen mycket snabbt ner. Endast en obetydlig överlagring av det yttre och det inre ljusbandet vid brytningen kan iakttas.

Fotografierna ger måhända en uppfattning om hur effektfullt de olika förloppen ter sig vid demonstration med apparaten.[1]

[1] Ett antal ex. av apparaten kommer event. att tillverkas. Upplysningar genom G. Leide, Fysiska inst., Lund.

Analysvågen II

Av assistent Karin Aurivillius, Stockholm

(Forts. från junihäftet s. 92)

8. Olika vägningsmetoder

a. Proportionalvägning, kemisk vägning

Vid vägningar för kemisk analys är endast förhållandet mellan föremålens massor av intresse, däremot icke deras absoluta massor.

Väger man två föremål på så sätt, att man placerar dem i tur och ordning på samma vågskål och standardmassor (vikter) på den andra, finner man *icke* föremålens absoluta massor utan endast däremot proportionella vikter, om l_h/l_v är obekant.

Föremålens massor äro W_1 och W_2. På andra vågskålen lägger man vikter som nästan återföra vågen till dess obelastade jämviktsläge α_0, och med kännedom om vågens känslighet kan man beräkna de vikter P_1 resp. P_2 som skulle inställa vågen exakt i läget α_0. Ekv. (6) förenklas nu till

$$W_1(l_v+a\alpha_0)=P_1(l_h-a\alpha_0); \quad W_2(l_v+a\alpha_0)=P_2(l_h-a\alpha_0) \qquad (19)\ (20)$$

Nu blir

$$W_1/W_2=P_1/P_2 \qquad (21)$$

men detta gäller även om l_v och l_h skulle vara avsevärt olika.

b. Dubbelvägning, Gauss' vägningsmetod

Om man vill bestämma differensen i massa mellan två nära lika tunga föremål W och P (eller P_1 och P_2), kan man använda dubbelvägning på samma sätt som vid bestämningen av Δl (se § 7).

Ur ekv. (13) och (14) erhålles genom subtraktion ($l_h \approx l_v$):

$$\Delta P=\frac{[(P_1+P_2+M_v+M_h)a+Qd](\alpha_1-\alpha_2)}{l_v+l_h} \qquad (22)$$

Nu införas samma storheter som i ekv. (16) och (17), vilket ger

$$\Delta P=\frac{s_1-s_2}{2K}\ \mathrm{mg} \qquad (23)$$

Jämviktsläget för den obelastade vågen måste vara detsamma vid de båda vägningarna inom gränserna för osäkerheten ($s_{01}=s_{02}$), annars måste vägningen förkastas.

Denna vägningsmetod kan ge mycket noggranna värden.

c. Tarervägning, substitutionsvägning, Bordas vägningsmetod

Vid kemiska arbeten kommer denna vägningsmetod företrädesvis till användning vid noggrann bestämning av tätheter och vid kalibrering av vikter. Det föremål som skall vägas placeras på den ena vågskålen. På den andra vågskålen placeras en tara, som förblir orörd under hela vägningen. Sedan jämviktsläget för den belastade vågen bestämts, bytes föremålet ut (substitueras) mot ungefär lika tunga vikter och vågens jämviktsläge bestämmes ånyo.

Om föremålets massa är P, vikternas $P+\Delta P$ och tarans W, finna vi

$$P(l_v+a\alpha_1)+[(M_v+M_h)a+Qd](\alpha_1-\alpha_{01})=W(l_h-a\alpha_1) \tag{24}$$

$$(P+\Delta P)(l_v+a\alpha_2)+[(M_v+M_h)a+Qd](\alpha_2-\alpha_{02})=W(l_h-a\alpha_2) \tag{25}$$

Ur ekv. (24) och (25) erhålles genom subtraktion, om $a=s/l_l$, $a\alpha_2 \ll l_v$ och K införas,

$$\Delta P=\frac{(s_1-s_{01})-(s_2-s_{02})}{K}\ \text{mg} \tag{26}$$

Vi måste ha $s_{01}=s_{02}$ och få då $\Delta P=\frac{s_1-s_2}{K}\ \text{mg}$ (27)

Vid mycket noggranna vägningar måste jämviktsläget för den obelastade vågen bestämmas före och efter varje vägning. Emellertid kan man vanligen nöja sig med att vid en serie vägningar bestämma detta jämviktsläge före den första vägningen och efter den sista, för att konstatera att vågens jämviktsläge ej undergått någon förändring. Man löper härvid risken att behöva förkasta alla vägningar om $s_{01}\neq s_{02}$.

9. Kalibrering av vikter

Vikterna i en viktsats ha alltid större eller mindre fel. Dessa fel äro av sådan storleksordning, att det är nödvändigt, att man känner dem och inför motsvarande korrektioner vid vägningarna.

En god och bekväm metod att kalibrera sina vikter är att väga in dem mot en viktsats med certifikat, dvs. en viktsats, där vikternas massor äro säkert kända. Därvid bör man placera de certifierade vikterna på den vågskål, där man brukar placera föremålet. Detta blir bekvämast för vikternas användning i fortsättningen och betyder, att man i själva verket använder Bordas vägningsmetod. Vill man veta deras absoluta vikter, begagnas Gauss' metod (§ 8 b).

Har man ej tillgång till en certifierad viktsats, måste man kalibrera vikterna inbördes. Detta räcker för allt sådant kemiskt

arbete, där man blott behöver känna det riktiga förhållandet mellan vikterna och ej deras exakta massor.

Olika kalibreringsmetoder äro beskrivna t. ex. i Kohlrausch, Prakt. Physik, Lpz & Berl. 1935, sid. 36—40 och i Kolthoff and Sandell, Textbook of Quantitative Inorg. Analysis, New York 1946, sid. 224—232. Nedan beskrives en modifikation av Richards' metod (Z. physik. Chem. 33 (1900) 604, se även Kolthoff and Sandell).

Richards' kalibreringsmetod

Denna exemplifieras i nedanstående tabell 1. För tydlighetens skull har en sekunda viktsats använts.

Vägningarna äro utförda enligt Gauss' dubbelvägningsmetod (§ **8** b). Kolumnen w i tabellen anger de nominella (präglade) massvärdena på de vikter, som skola kalibreras. Kol. m anger motvikterna (ur samma viktsats). Kol. s_1 ger jämviktslägena i skaldelar, då w är placerad på vänster vågskål och m på höger. Kol. s_2 ger jämviktsläget i skaldelar, då vikterna bytt vågskålar. Kol. $2K$ ger dubbla känsligheten hos vågen i skaldelar/mg. Kol. $(s_1-s_2)/2K$ ger viktdifferensen i mg mellan massorna w och m (ekv. 23). I kol. $\Sigma(w+\delta w)$ för motvikter äro dessa vikter uttryckta i en provisorisk viktsenhet, »g», som gör ryttaren $0{,}01_R = 0{,}01000$ »g». Kol. δw anger den positiva eller negativa korrektionen i mg i viktens påstämplade massa w. Som synes äro dessa korrektioner merendels rätt stora och de skulle vara obekväma att nyttja. Man föredrar därför att välja en massenhet, som gör en ofta använd vikt, t. ex. 10′, till exakt 10,00000 g. (Man kan även taga viktsatsens tyngsta vikt eller summan av alla gramvikter som standard, men det erbjuder i allmänhet ingen fördel.) Man erhåller vikterna uttryckta i 10′ som standard genom att multiplicera de korrigerade vikterna uttryckta i »g» med $10/(10+\delta 10')$. Man får: $(w+\delta w)10/(10+\delta 10') \approx (w+\delta w)(1-\delta 10'/10) \approx w+\delta w-w\delta 10'/10$. Kol. $w\delta 10'/10$ anger detta värde i mg. Vikternas totala korrektioner äro uträknade i mg i tabellens sista kolumn.

Om man har tillgång till en enda certifierad vikt, t. ex. 50 g, kan man bestämma den absoluta korrektionen för tabellens 50 g-vikt och beräkna de övriga vikternas absoluta korrektioner genom att multiplicera $w+\delta w$ med förhållandet mellan 50 g-viktens exakta vikt och värdet $w_{50}+\delta w_{50}$ ur tabellen.

För varje viktsats skola de funna korrektionerna sammanföras till två tabeller, en för småvikterna och en för gramvikterna, ur vilka man direkt skall kunna få summan korrektioner vid viss belastning.

Tabell 1.

w	m	s_1	s_2	$2K$	$\frac{s_1-s_2}{2K}$	$\Sigma(w+\delta w)$ för motvikter	δw	$\frac{w\delta 10'}{10}$	korr.
g	g				mg	»g»	mg	mg	mg
$0{,}01_R$						0,01000			
0,01	$0{,}01_R$	+1,27	+0,55	4,0	+0,180	0,01000	+0,18	0,01	+0,17
0,02	$0{,}01+0{,}01_R$	+0,91	+0,87	4,0	+0,010	0,02018	+0,19	0,02	+0,17
0,02*	0,02	+1,15	+0,55	4,0	+0,150	0,02019	+0,34	0,02	+0,32
0,05	0,02+0,02*+0,01	−0,36	+1,93	4,0	−0,573	0,05071	+0,14	0,05	+0,09
0,1	0,05+0,02+0,02*+0,01	−0,43	+2,14	4,0	−0,643	0,10085	+0,21	0,11	+0,10
0,2	0,1+0,05+0,02+0,02*+0,01	−5,33	+6,85	4,0	−3,045	0,20106	−1,99	0,21	−2,20
0,2*	0,2	+6,10	−4,63	4,0	+2,683	0,19801	+0,69	0,21	+0,48
0,5	0,2+0,2*+0,1	+4,94	−3,24	4,0	+2,045	0,49891	+0,96	0,53	+0,43
1	$0{,}5+0{,}2+0{,}2^*+0{,}1+0{,}01_R$	−6,54	+8,08	4,0	−3,655	1,00987	+6,21	1,05	+5,16
2	$1+0{,}5+0{,}2+0{,}2^*+0{,}1+0{,}01_R$	−3,07	+4,99	4,0	−2,015	2,01608	+14,06	2,10	+11,96
2*	2−0,2*	+4,06	−2,32	4,0	+1,595	1,99372	−4,68	2,10	−6,78
5	$2+2^*+1-0{,}01_R$	+0,12	+1,96	3,8	−0,484	5,00559	+5,11	5,25	−0,14
10′	$5+2+2^*+1-0{,}01_R$	+0,56	+1,29	3,7	−0,197	10,01070	+10,50	10,50	0,00
10*	10′	+7,57	−5,88	3,7	+3,635	10,01050	+14,14	10,50	+3,64
20	$10'+10^*-0{,}01_R$	+2,58	+0,03	3,5	+0,729	20,01464	+15,37	21,00	−5,63
50	20+10′+10*+5+2+2*+1+0,5	+9,68	−6,70	3,2	+5,119	50,11085	+115,97	52,50	+63,47

Tabellerna uppställas lämpligen på detta sätt:

mg→	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
↓										
0		+0,2	+0,2	+0,3	+0,5	+0,1	...			
100	+0,1	+0,3	+0,3	+0,4	...					
200	−2,2	−2,0	−2,0	...						
⋮										
900	−1,3	...								

Därvid måste man komma ihåg, att man alltid i första hand använder omärkt vikt före märkt, och vikt med ett märke före en vikt med två etc.

Mycket praktiska äro viktsatser med vikterna 1, 2, 3, 5 g osv.

10. Korrektion för luftens upptryck

Vid noggranna vägningar måste man alltid korrigera de funna värdena för luftens upptryck; vid vanlig kemisk rutinanalys är dock denna korrektion i de flesta fall överflödig.

Beteckningar:

W föremålets massa	σ föremålets täthet
P massan av de vikter som inställa vågen i läget α_0	ϱ luftens täthet
	δ vikternas täthet

På grund av luftens upptryck (Arkimedes princip) minskas föremålets tyngd till

$$W(1-\varrho/\sigma)\cdot g \tag{28}$$

och vikternas till

$$P(1-\varrho/\delta)\cdot g \tag{29}$$

och i de tidigare ekvationerna skola W och P förses med de nu angivna korrektionsfaktorerna. Väger man enligt § 8 a, kommer ekv. (19) att övergå till

$$W=\frac{l_h-a\alpha_0}{l_v+a\alpha_0}P\cdot(1+\varrho/\sigma-\varrho/\delta) \tag{30}$$

Faktorn före P är konstant så länge vågens olikarmighet och nollpunkt äro konstanta, och för analytiskt arbete är det ej nödvändigt att dess värde är exakt = 1. Det har ej heller någon betydelse vad den sista parentesen har för värde, blott den är *konstant*. Så är fallet, om luftens täthet ϱ ej ändrar sig under analysarbetets gång och tätheten σ för de vägda substanserna äro lika. Väger man enligt § 8 b eller c, måste ävenledes den funna vikten P multipliceras med $1+\varrho/\sigma-\varrho/\delta$, för att man skall få föremålets massa W.

Den korrektion

$$P\varrho(1/\sigma - 1/\delta) \tag{31}$$

som skall läggas till vikternas massa, för att man skall få föremålets massa, är uträknad i tabell 2 för olika värden på σ, under förutsättning att $P=100$ g, $\delta=8{,}4$ g/ml (mässingsvikter) och $\varrho=1{,}184$ mg/ml (luft av 50 % relativ fuktighet vid 1000 millibar och 20° C). Om man vid en precisionsanalys skall bestämma förhållandet mellan massorna av två substanser av betydligt olika specifik volym $1/\sigma$, måste denna korrektion införas, men sällan annars. Den skall i så fall anbringas på *analyssubstansernas* vikter.

Om den vägda substansen befinner sig i ett kärl, som är så stort att massan av den därav undanträngda luften är av samma storleksordning som analyssubstansens massa, och luftens täthet ändras mellan två vägningar, kan det emellertid lätt hända, att upptrycket ändras med ett belopp som är större än vägningens osäkerhet, och då måste man införa en korrektion för täthetens *ändring*.

Tätheten hos luft av 50 % relativ fuktighet följer inom det ifrågakommande området formeln

$$\varrho = 1{,}184 + 0{,}00118(p-1000) - 0{,}0044(t-20) \text{ mg/ml} \tag{32}$$

där p är barometerståndet i millibar och t temperaturen i ° C. Utför man vägningen vid p mb tryck, måste man till den funna vikten P addera värdet

$$P(1/\sigma - 1/\delta) \cdot 0{,}00118(p-1000) \tag{33}$$

för att få den vikt som skulle pålagts vid 1000 mb tryck, och vid t ° C måste man addera

$$-P(1/\sigma - 1/\delta) \cdot 0{,}0044(t-20) \tag{34}$$

för att få vikten som skulle pålagts vid 20° C. Även dessa båda korrektioner finnas i tabell 2 för $P=100$ g och olika värden på σ. — Väger man ett kärl blott två gånger, korrigerar man den ena vägningen för ändringen av p och t, men har många vägningar skett, är det bekvämast att korrigera alla värdena till $p=1000$ mb, $t=20°$.

Ex. Ett föremål befanns väga 10,0014 g vid 1000 mb och 20° C. Tätheten var 1,5. Hur stor är massan? — Korrektionen är i tabell 2 uträknad för 100 g. Man får $W = 10{,}0014 + 0{,}0065 = 10{,}0079$ g.

Ex. Ett föremål vägande 30 g och med tätheten 1,5 vägdes vid två tillfällen. Första gången var trycket 995 mb, temp. 22° C, andra

Tabell 2.

Täthet	Total korrektion	Korrektion för 1 mb lufttrycksökning (*)	Korrektion för 1° temperaturökning
0,6	183 mg	0,18 mg	−0,68 mg
0,8	134	0,13	−0,50
1,0	104	0,10	−0,39
1,2	85	0,08	−0,31
1,5	65	0,06	−0,24
2	45	0,05	−0,17
3	25	0,03	−0,09
4	16	0,02	−0,06
6	6	0,01	−0,02
8	1	0,00	0,00
12	−4	−0,00	0,02
16	−7	−0,01	0,02
21	−8	−0,01	0,03

Om lufttrycket mätes i mm Hg (torr), skola talen i tredje kolumnen (*) multipliceras med 4/3; (1000 mb=750 mm Hg).

gången tryck 1016 mb och temp. 19° C. Hur stor blir korrektionen för den andra vägningen? — Då tabellen ger även dessa korrektioner för 100 g, blir svaret $0{,}3 \cdot 0{,}06 \cdot 21 + 0{,}3 \cdot (-0{,}24)(-3) = 0{,}38 + 0{,}22 = 0{,}60$ mg. Vikten andra gången skall ökas med 0,6 mg.

11. Vägningens praktiska utförande

Vågen skall ställas upp på ett fast vibrationsfritt underlag, som vanligen utgöres av två konsoler, som äro fastsatta i en hjärtmur. Vågen placeras på en marmorplatta, som vilar på gummiproppar eller särskilda fjädrar, fastsatta på konsolerna. Det är viktigt, att vågen skyddas mot luftströmmar (värmeledningselement, otäta fönster!) samt direkt solbestrålning.

Vågens ömtåligaste delar äro eggarna. För att i möjligaste mån skydda dem från stötar (häftiga belastningsförändringar e. d) som skulle kunna skada dem måste man ovillkorligen tillse, att vågen är *arreterad*, när den icke användes och när man vid en vägning placerar föremål eller vikter på vågskålarna eller tar dem därifrån. Vågen arreteras genom en anordning som successivt lyfter av mitteggen från dess panna, vågskålarnas upphängningsok från sidoaxlarna samt stöder under vågskålarna.

När man placerat föremål och vikter på vågskålarna och skall

utföra avläsningen, *desarreterar* man vågen *långsamt*, så att belastningen försiktigt överföres på eggarna. Vågskålarna få därvid icke göra pendelsvängningar. Är belastningsskillnaden mellan vågskålarna stor, bör man icke desarretera vågen helt utan endast så mycket, att man ser åt vilket håll visaren vill svänga. Arreteringen av vågen skall även utföras med en mjuk rörelse, som, om vågen svängt fritt, genomföres när visaren svänger förbi det läge som den alltid har, när vågen är arreterad.

Det föremål som skall vägas placeras på den ena vågskålen (alltid den vänstra om man är högerhänt), och på den andra placerar man en vikt, som man bedömer vara något tyngre än föremålet. Är vikten för lätt, ersätter man den med närmast tyngre, om den är för tung med närmast lättare vikt. Man bestämmer på detta sätt inom vilka gränser föremålets vikt ligger, man »gafflar in» vikten. När man fått den första gränsbestämningen klar, tar man nästa vikt i storleksordningen och får på så sätt en ny övre eller undre gräns mellan de förra gränserna. Genom att undan för undan addera vikter i fallande storleksordning minskar man successivt avståndet mellan gränserna. Genom att på detta sätt systematiskt variera vikterna inom allt snävare gränser placerar man på högra vågskålen en känd standardmassa, som så nära som möjligt ger jämvikt med föremålet. Vikterna kunna emellertid sällan varieras med lägre värden än 10 mg. För en massförändring som är mindre än 10 mg tillgriper man nästa metod för variation av vikterna. Med en enkel manöveranordning placerar man på vågbalkens översida, eller på en med denna fast förbunden brygga, en ryttare, vanligen en 10-mg vikt av aluminium- eller platinatråd. Vågbalkens översida är graderad, så att man genom att placera ryttaren vid delstrecken ger åt vågarmen ett vridande moment, motsvarande en belastning på vågskålen av 1—10 mg allt efter läget (vågarmen är graderad 1—10). De på vågskålen anbringade vikterna skola vara så avpassade, att masskillnaden mellan föremålet, som är tyngst, och vikterna är <10 mg. Man varierar nu ryttarens läge på ett sätt analogt med det föregående, dvs. först med stora förflyttningar och sedan med allt mindre.

För att bestämma den kvarvarande masskillnaden, 0,1—1 mg, brukar man vanligen icke kompensera med ryttaren, som alltså endast placeras på de jämna delstrecken 1—10. Man tillgriper där avläsning av utslag. När man med ryttaren nått så nära jämvikt som möjligt, svänger vågen kring ett viloläge, skilt från den obelastade vågens viloläge (nolläget). Man avläser nu läget för jämvikten, bestämmer vinkelskillnaden, uttrycket i skaldelar, mellan detta läge och nolläget och får därur, med kännedom om vågens

känslighet, direkt reda på den kvarstående masskillnaden, ΔP ur $\Delta P=(s_1-s_0)/K$. Vid mycket noggranna vägningar bör känsligheten direkt bestämmas vid varje tillfälle.

12. Allmänna iakttagelser vid vägningar

Innan man använder en okänd våg, skall man bestämma dess:

osäkerhet (vid olika belastning)
känslighet (» » »)
olikarmighet (» » »)

Dessutom skall *viktsatsen kalibreras.*

Vid varje vägning bestämmes och tages hänsyn till:

vågens nollpunkt (före och *efter* vägningen)
temperatur och tryck i vågrummet.

Luftens fuktighet kan i allmänhet antagas vara 50 %.

Vågen påverkas lätt av yttre störningar och kan dessutom lätt skadas vid ovarsam behandling. Det är därför av stor vikt, att man vid dess användande noga iakttager vissa försiktighetsåtgärder.

Lägg aldrig på någonting eller plocka av någonting från vågskålarna, när vågen icke är *arreterad.*
Överbelasta ej vågen. På analysvåg väges i regel ej föremål, som äro tyngre än 200 g.
Belasta ej vågskålarna snett. Placera massorna i centrum av vågskålarna.
Håll vågskåpets dörrar stängda vid avläsningarna.
Öppna aldrig vågskåpets främre lucka.
Placera alltid vikterna på *samma vågskål.*
Väg aldrig någon kemisk substans direkt på vågskålarna. Väg alltid vätskor eller andra substanser med mätbara ångtryck (jod!) *i slutna kärl.*

Vid konstantvägning av deglar böra dessa kallna i exsickator före vägningen. Deglar av porslin skola stå och kallna 1 ½ timme och deglar av platina 30 min. för att de skola få rumstemperatur och för att ytorna skola adsorbera den fuktighet, som normalt inräknas i deras massa. För att spara tid kan man tillåta kortare avsvalningstid men måste då iakttaga noggrannare tidsgränser t. ex. för en porslinsdegel (30±2) min.; för en platinadegel (20±2) min.

Vågen måste alltid hållas absolut ren. Om vid uppvägning någonting spillts i eller utanför vågskåpet, torka eller sopa *genast* bort det.

Tag aldrig i vikterna med fingrarna utan endast med pincett med spetsar av ben.

Om en vikt gått förlorad, »låna» aldrig vikt från annan viktsats utan anmäl genast förlusten.

Kontrollera alltid minst 2 gånger att vikterna *avlästs* riktigt och anteckna *genast* siffrorna i vågprotokollet.

Plocka genast av vikter och ryttare från vågen efter slutad vägning.

I protokollsboken torde det vara lämpligast, att endast vänstersidorna upptagas med protokoll, medan högersidorna sparas för uträkningar och anteckningar av skilda slag.

Vidare bör varje protokoll vara indelat i lämpliga tabeller för: Föremålets benämning, dess funna vikt, temperatur och tryck, korrektioner, korrigerad vikt, datum och event. resultat.

Författaren önskar tacka professor A. Ölander för råd och värdefull hjälp vid utarbetandet av denna handledning.

För givande diskussioner vill författaren framföra ett tack till laboratoriechefen H. Arnfelt, myntdirektören T. Swensson och ingenjören vid K. Myntverket E. Walldow.

Litteratur

W. Felgentraeger, Theori, Konstruktion und Gebrauch der feineren Hebelwage, Leipzig und Berlin, 1932.

F. Kohlrausch, Praktische Physik, Leipzig und Berlin, 1935.

I. M. Kolthoff and E. B. Sandell, Textbook of Quantitative Inorganic Analysis, New York, 1946.

Uppsatserna om analysvågen ha sammanförts i ett särtryck: Karin Aurivillius, Analysvågen (kr. 2: 40), som kan erhållas från Elementas exp. eller genom bokhandeln.

Ekvationer med rationella rötter

Av lektor Agne Wahlgren, Stockholm

A. Om en tredjegradsekvation utan andragradsterm har tre rationella rötter, kunna dessa skrivas

$$x_i = \frac{m}{n} \cdot \frac{a_i}{b_i}$$

där m och n äro de största gemensamma divisorerna till resp. täljarna och nämnarna. Emedan rötternas summa är 0, kan en primfaktor ej höra till endast ett b_i utan måste ingå till samma dignitet i två b_i. Om n_i är den gemensamma faktorn till b_j och b_k, där i, j, k äro permutationer av talen 1, 2, 3, kunna rötterna därför skrivas

$$x_i = \frac{m}{n} \cdot \frac{a_i}{n_j n_k} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k_i}{N}$$

där $$k_i = a_i n_i, \quad N = n_1 n_2 n_3, \quad k_1 + k_2 + k_3 = 0 \tag{1}$$

Ekvationen blir då

$$n^3 N^2 x^3 - m^2 n B x - m^3 A = 0 \tag{2}$$

$$A = a_1 a_2 a_3; \quad B = -(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3) = k_1^2 + k_1 k_2 + k_2^2 \tag{3}$$

Emedan talen a_i sakna gemensam faktor och a_i är rel. primtal till $n_j n_k$, finnes ej heller någon gemensam faktor till talen k_i. Av (1) följer då, att k_i även parvis äro rel. primtal, varför B är rel. primtal till varje k_i och således även till A och N. Vidare är naturligtvis n rel. primtal till a_i och således till A samt m rel. primtal till n_i och N. Koefficienterna i (2) ha således ej någon gemensam faktor. Däremot kunna a_i och n_i och således även A och N ha en gemensam faktor. Av (3) synes lätt, att B alltid är positivt, vilket ju är ett bekant villkor för att rötterna skola vara reella. Vidare är B udda, eftersom k_1 och k_2 ej båda få vara jämna. I talteorien visas, att ett tal av formen (3), då k_1 och k_2 äro rel. primtal, endast kan ha primfaktorer av formen $6a+1$ jämte högst en faktor 3.

Substitueras $x = my : nN$, erhålles

$$y^3 - By - C = 0, \quad C = AN = k_1 k_2 k_3 \tag{4}$$

Ett villkor för att rötterna skola vara rationella är naturligtvis, att diskriminanten $4B^3-27C^2$ är en jämn kvadrat; diskriminanten är ju produkten av kvadraterna på de tre differenserna mellan rötterna. Genom att undersöka koefficienternas rester i avseende på modylerna 8, 3, 5 och 7 skola vi finna nya villkor. [Varje tal b, för vilket $a=kc+b$, där k är ett positivt eller negativt helt tal, säges vara en rest till a i avseende på modylen c; man säger även, att a och b äro kongruenta, $a\equiv b \pmod c$.] På grund av (1) måste en av rötterna k_i till (4) vara jämn och de båda andra udda. Den konstanta termen måste då vara jämn. Den jämna roten väljes tillsvidare till k_1. Om C har ν faktorer 2, är $k_1=2^\nu \cdot a$, där a är udda, och $k_2=2b+1$. Eftersom varje udda kvadrat är $\equiv 1 \pmod 8$, erhålles för

$\nu=1$: $\quad B=4a^2+2a(2b+1)+(2b+1)^2\equiv 2a+1\equiv 3 \pmod 4$

$\nu=2$: $\quad B\equiv k_1k_2+k_2^2\equiv 4+1=5 \pmod 8$

$\nu>2$: $\quad B\equiv k_2^2\equiv 1 \pmod 8$

För rationella rötter fordras således $B\equiv 3$ eller 7, $\equiv 5$ eller $\equiv 1 \pmod 8$, allteftersom C har en, två eller flere faktorer 2.

I avseende på mod 3 ger (1) antingen $k_1\equiv 0$, $k_2\equiv -k_3\equiv \pm 1$ eller $k_1\equiv k_2\equiv k_3\equiv \pm 1$. Eftersom varje kvadrattal, som ej är delbart med 3, är $\equiv 1 \pmod 3$, får man i förra fallet

$$B\equiv k_2^2\equiv 1, \quad C\equiv 0 \pmod 3$$

I senare fallet sättes $k_i=3g_i\pm 1$. Då ger (1)

$$g_1+g_2+g_3=\mp 1$$

$$B=-\sum_{i\neq j}(3g_i\pm 1)(3g_j\pm 1)\equiv -(\pm 2\cdot 3\Sigma g_i+3)=3 \pmod 9$$

$$C=\Pi(3g_i\pm 1)\equiv 3(g_1+g_2+g_3)\pm 1=\mp 2 \pmod 9$$

För rationella rötter fordras således, att 3 är faktor antingen i C eller i B. I förra fallet fordras $B\equiv 1 \pmod 3$, i senare fallet $B\equiv 3$, $C\equiv \pm 2 \pmod 9$. Villkoren beträffande B innebära ej något nytt; de äro konsekvenser av att alla faktorer i B utom en eventuell faktor 3 måste ha formen $6a+1$.

I avseende på mod 5 äro alla kvadrater $\equiv 0$ eller ± 1. Likheten (1) ger följande möjligheter (de övre tecknen höra samman liksom de nedre):

1) $k_1\equiv 0$, $k_2\equiv -k_3\not\equiv 0$, $\quad B\equiv k_2^2\equiv \pm 1$, $\quad C\equiv 0$

2) $k_1\equiv k_2\equiv \pm 1$, $k_3\equiv \mp 2$, $\quad B\equiv 1+1+1\equiv -2$, $\quad C\equiv \mp 2$

3) $k_1\equiv \pm 1$, $k_2\equiv k_3\equiv \pm 2$, $\quad B\equiv 1+2+4\equiv 2$, $\quad C\equiv \mp 1$

För rationella rötter fordras således $B\equiv \pm 1$ eller 2 eller -2, allteftersom C är $\equiv 0$ eller ± 1 eller $\pm 2 \pmod 5$.

moderna böcker i

KEMI

KEMISK REAKTIONSLÄRA *G. Hägg. AWEs Akad. handböcker.*
En inledning till analysens teori. 6:60

KEMISKA RÄKNEUPPGIFTER *Nylén—Wigren.*
Med svar och anvisningar. 12:75

KVALITATIV OORGANISK ANALYS *T. Philipson.*
Handledning vid laborationsövningar. 8:75

PREPARATIV OORGANISK KEMI *T. Philipson.*
Handledning vid laborationsövningar. 5:50

FYSIKALISK-KEMISKA RÄKNEUPPGIFTER *Sillén—Lange—Gabrielson. AWEs Akademiska handböcker.* 29:—

KEMI FÖR REALSKOLAN I *H. Leyon.* Oorganisk kemi.
Lättfattlig framställning av elementär kemi. 1:25

ALLMÄN KEMI *L. Pauling. AWEs Akad. handböcker.* 60:—

STUDIEPLAN I KEMI *G. Lindhe.* Utkommer i höst.

Almqvist & Wiksell
Box 159, Stockholm 1, Postgiro 758

AWE

UNIVERSALINSTRUMENT
av fabrikat Metra

Ett universalinstrument av högsta kvalité för mätning av lik- och växelström samt lik- och växelspänning.

34 Mätområden:

Lik- och växelspänning: 1,2, 6, 12, 30, 60, 120, 300 och 600 V.
Lik- och växelström: 1,2, 3, 12, 30, 120, 300 mA, 1,2 och 6 A.
Noggrannhet: vid likström ± 1%, vid växelström ± 1,5%.
Egenförbrukning: ca 1 mA (inre motstånd 1000 ohm/V).

Instrumentet har spegelskala och knivvisare och är inbyggt i hölje av svart bakelit med dimensionerna 180 x 100 x 60 mm.

Begär offert från

Ingenjörsfirman INTRAM Aktiebolag

Stopvägen 22 — Bromma — Tel. Stockholm 263530

I avseende på mod 7 äro alla kvadrater $\equiv 0, 1, 2$ eller 4. De olika möjligheterna för talens rester anges av vidstående tabell. Av denna synes, att C ej får vara $\equiv \pm 3$. Om C har faktorn 7, fordras $B \equiv 1, 2$ eller 4, dvs. B skall vara kvadratisk rest till 7. [Ett tal, som ej har faktorn p, säges vara kvadratisk rest till p, om det är kongruent med en kvadrat (mod p).] Om $C \equiv \pm 1$, fordras, att B har faktorn 7, och om $C \equiv \pm 2$, fordras, att $B \equiv 3, 5$ eller 6, dvs. B skall vara kvadratisk ickerest till 7.

k_i			B	C
0	a	$-a$	1, 2, 4	0
± 1	± 1	∓ 2	3	∓ 2
± 1	± 2	∓ 3	0	± 1
± 1	± 3	± 3	6	± 2
± 2	± 2	± 3	5	∓ 2

För ett godtyckligt primtal p gäller, att om p är faktor i C, måste B vara en kvadratisk rest till p. Ty eftersom rötterna sakna gemensam faktor, finnes det alltid en rot k, som ej har faktorn p. Insättes denna i (4), erhålles

$$k(k^2 - B) - C = 0$$

Om då p är faktor i C, måste p även vara faktor i $k^2 - B \therefore B \equiv k^2 \not\equiv 0$ (mod p). [Eller: faktorn p måste tillhöra någon av rötterna. Väljes denna till k_1, ger (3) omedelbart $B \equiv k_2^2$.] Som synes stämmer detta med de resultat vi funnit för $p = 3, 5$ och 7.

På liknande sätt finna vi, att om p är faktor i B, måste C vara en kubisk rest till p. Detta ha vi redan funnit för $p = 7$, till vilket tal 1 och -1 äro kubiska rester.

Vi återgå till det fall, då rötterna äro bråk men sakna gemensam faktor i täljarna eller nämnarna. Eftersom koefficienterna i (2) sakna gemensam faktor, måste då koefficienten för x^3 vara en jämn kvadrat N^2, och de funna villkoren gälla fortfarande, om C utbytes mot AN.

Men de villkor, som gälla, då C har en primfaktor p, kunna anpassas även för de ekvationer, där ej $m = n = 1$. Ekvationen (2) skrives då kortare

$$ax^3 - bx - c = 0 \tag{5}$$

Vi ha funnit, att om C har faktorn p, får ej B ha denna faktor. Antag

$$m = p^r m_1, \quad n = p^s n_1, \quad N = p^t N_1, \quad A = p^u A_1$$

där högst två av exponenterna för p få vara > 0, såsom vi strax skola finna. Antag vidare, att exponenten för p i a, b och c är resp. z_1, z_2 och z_3. Då är

$$z_1 = 3s + 2t, \quad z_2 = 2r + s, \quad z_3 = 3r + u$$
$$ab = p^{2r+4s+2t} m_1^2 n_1^4 N_1^2 B = p^{2R} B_1 \tag{6}$$

Eftersom koefficienterna i (5) förutsättas sakna gemensam faktor, äro följande fall möjliga:

$$\begin{array}{lll} z_1=0 & z_2=2r & z_3=3r+u \\ z_1=2t & z_2=0 & z_3=u \\ z_1=3s+2t & z_2=s & z_3=0 \end{array}$$

Med kännedom om z-värdena erhåller man lätt t och u. Om $t+u>0$, får C faktorn p. För $p=2$ synes av (6), att $B_1 \equiv B \pmod 8$, eftersom alla udda kvadrater äro $\equiv 1 \pmod 8$. Villkoret blir således, att B_1, dvs. den största udda divisorn i ab, skall vara $\equiv 3$ eller 7, $\equiv 5$ eller $\equiv 1 \pmod 8$, allteftersom $u+t=1$ eller 2 eller >2. Om åter p är ett udda primtal, fordras, att B är en kvadratisk rest till p. Men i talteorien visas, att om K är en kvadratisk rest, äro B och KB båda rester eller båda ickerester. Av (6) synes således, att B_1, dvs. den största divisorn i ab, som ej har faktorn p, skall vara kvadratisk rest till p.

B. Om en tredjegradsekvation utan andragradsterm har en rationell rot och två komplexa med rationella koefficienter, kunna rötterna skrivas

$$x_{1,2}=\frac{m}{n}\left(-a \pm \frac{bi}{N}\right) \qquad x_3=\frac{m}{n}\cdot 2a$$

där m och nN, a och n, b och aN äro rel. primtal. Däremot kunna a och N liksom b och n ha en gemensam faktor, i senare fallet tillkommen vid utbrytningen av n. Man får

$$\Sigma x_i x_j=\frac{m^2}{n^2}\left(a^2+\frac{b^2}{N^2}-4a^2\right)=-\frac{m^2 B}{n^2 N^2}$$

$$x_1x_2x_3=\frac{m^3}{n^3}\cdot 2a\left(a^2+\frac{b^2}{N^2}\right)=\frac{m^3\cdot 2aA}{n^3N^2}$$

$$B=3a^2N^2-b^2, \qquad A=a^2N^2+b^2 \tag{7}$$

Ekvationen blir då

$$n^3N^2x^3-m^2nBx-m^3\cdot 2aA=0 \tag{8}$$

Eftersom b och aN äro rel. primtal, äro A och B rel. primtal till abN, och A och B kunna ej ha någon annan gemensam faktor än 2. Härför fordras, att abN är udda. Men varken A eller B kan ha mer än en faktor 2, ty

$$a^2N^2+b^2 \equiv 1+1=2, \quad 3a^2N^2-b^2 \equiv 3-1=2 \pmod 4$$

En gemensam faktor h till koefficienterna i (8) kan ej ingå i m, eftersom m är rel. primtal till nN. Den måste därför ingå i nB. Men N är rel. primtal till B; då måste h ingå i n^3. Vidare är a rel. primtal till nB; alltså måste h ingå i $2A$. Men eftersom A och B

ej kunna ha någon annan gemensam faktor än 2, måste h ingå i n, försåvitt ej A och B äro jämna, då n kan ha en enda faktor 2, medan h får faktorn 4. I förra fallet sättes $n=hn_1$, $2A=hA_1$, då (8) efter förkortning ger

$$n_1^3N_1^2x^3-m^2n_1Bx-m^3aA_1=0, \quad N_1=hN \tag{9}$$

I senare fallet sättes $n=2gn_1$, $2A=4gA_2$, $B=2B_1$, och man får

$$2n_1^3N_1^2x^3-m^2n_1B_1x-m^3aA_2=0, \quad N_1=gN \tag{10}$$

I detta fall äro g, n_1, A_2, B_1, m, a och N udda. Koefficienten för x^3 har således en enda faktor 2 och de båda andra äro udda. I båda fallen måste varje udda primfaktor i koefficienten för x^3 ingå till minst andra digniteten. Nu substitueras $x=my:n_1N_1$ i (9) och $x=my:2n_1N_1$ i (10), i båda fallen således $x=my:nN$, och man får

$$y^3-By-C=0, \quad C=2aAN \tag{11}$$

Här förutsättes således, att man ej samtidigt har några faktorer p^2 och p^3 i B och C. Rötterna äro

$$y_{1,2}=-aN\pm bi=-c\pm bi, \quad y_3=2c$$

där b och c äro rel. primtal. Då är

$$B=3c^2-b^2, \quad C=2c(b^2+c^2) \tag{12}$$

Härav synes, att C måste vara jämnt. Om B är jämnt, äro b och c udda och

$$B\equiv 3-1=2, \quad b^2+c^2\equiv 2 \pmod 8$$

varför C har endast två faktorer 2; sättes $B=2B_1$, är $B_1\equiv 1 \pmod 4$. Detta fall är ekvivalent med fallet (10). Om b är jämnt och c udda, är $B\equiv 3-0=3 \pmod 4$, och C har en enda faktor 2. Om b är udda och c har en enda faktor 2, är $B\equiv 4-1=3 \pmod 8$, och C har endast två faktorer 2. Om b är udda och c har mer än en faktor 2, är $B\equiv 0-1\equiv 7 \pmod 8$, och C har minst tre 2-faktorer.

Vi ha således funnit, att om $B=2B_1$, fordras $B_1\equiv 1 \pmod 4$, och C skall ha två faktorer 2. Om B är udda, fordras $B\equiv 3 \pmod 4$, vilket skärpes till $B\equiv 3$, resp. $7 \pmod 8$, när antalet 2-faktorer i C är $=2$, resp. >2.

Om b ej har faktorn 3, följer av (12), att $B\equiv -b^2\equiv -1 \pmod 3$. Om $b=3b_1$, blir

$$B=3(c^2-3b_1^2)=3B_1$$

Eftersom 3 ej får vara faktor även till c, är $B_1\equiv 1 \pmod 3$ $\therefore B\equiv 3 \pmod 9$. Vidare blir $C=2c(9b_1^2+c^2)\equiv 2c^3=2(3c_1\pm 1)^3\equiv\pm 2 \pmod 9$.

Om p är en annan udda primfaktor i B, är $b^2\equiv 3c^2$ eller $c^2\equiv 3b_1^2 \pmod p$. Då är 3 kvadratisk rest till p. I talteorien visas,

att p då måste ha formen $12k \pm 1$.[1] Av det föregående följer, att om B har antingen en faktor 2 eller en faktor 3, måste antalet faktorer i B av formen $12k-1$ vara jämnt, men om B har båda dessa faktorer eller ingendera, måste antalet vara udda.

För resterna (mod 5) till b^2 och c^2 samt de därav enl. (12) beräknade resterna till B och C anges de olika möjligheterna i nedanstående tabell, varvid observeras, att mot $c^2 \equiv 1$ svarar $c \equiv \pm 1$ och mot $c^2 \equiv -1$ svarar $c \equiv \pm 2$. Av tabellen synes, att om C har faktorn 5, är $B \equiv \pm 1$. Eljest är $B \equiv 2$, $C \equiv \pm 1$ eller $B \equiv -2$, $C \equiv \pm 2$.

$b^2 \equiv$	0	0	1	1	1	−1	−1	−1
$c^2 \equiv$	1	−1	0	1	−1	0	1	−1
$B \equiv$	−2	2	−1	2	1	1	−1	−2
$C \equiv$	±2	±1	0	±1	0	0	0	±2

Beträffande mod 7 vill jag endast nämna, att eftersom varje kvadrat är $\equiv 0$, 1, 2 eller 4, kan b^2+c^2 aldrig få faktorn 7. Om C har faktorn 7, måste därför även c ha denna faktor, och då är $B \equiv -b^2 \equiv 6$, 5, 3 och således B en kvadratisk ickerest till 7.

C. I ekvationen $$ax^4 - bx^2 - cx + d = 0 \qquad (13)$$

äro koefficienterna hela tal utan gemensam faktor. Rötterna $x_i = a_i : n_i$ antagas vara rationella utan gemensam faktor i täljarna eller i nämnarna. Divideras med a, erhålles

$$x^4 - b_1 x^2 - c_1 x + d_1 = 0 \qquad (13\,a)$$

En primfaktor p kan ej ingå i endast ett n_i till högre dignitet än i de övriga, ty då kan rötternas summa ej vara $=0$. Antag, att $r+s$ faktorer p ingå i två n_i och s faktorer i ett tredje ($r+s \geq 1$). Om $r>0$, blir antalet p-faktorer $2r+2s$ i en enda nämnare i $\Sigma x_i x_j$, och sedan summan reducerats till ett bråk, kvarstå därför dessa faktorer oförändrade i nämnaren till b_1. Om däremot $r=0$, få tre nämnare $2s$ faktorer p, och $b_1 : s$ nämnare kan då efter förkortning få en lägre dignitet av p. I $\Sigma x_i x_j x_k$ får en enda nämnare $2r+3s$ faktorer p, om $s>0$, och dessa kvarstå därför i nämnaren till c_1. Men om $s=0$, få två nämnare $2r$ faktorer p, och $c_1 : s$ nämnare kan få en lägre dignitet av p. Om speciellt $p=2$, fordras $r>0$, om $s>0$. Ty ha tre n_i lika många faktorer 2, äro motsvarande a_i udda, och göras bråken liknämniga, får endast den fjärde roten jämn täljare, vilket strider mot att summan är $=0$.

[1] Detta villkor har förut angivits av Öberg i en uppsats «Rationalitetsvillkor beträffande tredjegradsekvationens rötter» i årsredogörelsen 1951 för Tekniska gymnasiet i Härnösand.

Av alla dessa faktorer bildas nu N och N_1, på det sätt att alla p^r föras till N och alla p^s till N_1. Då bli rötterna

$$x_i=\frac{k_i}{NN_1} \quad \text{där} \quad \Sigma k_i=0 \tag{14}$$

och koefficienterna bli

$$b_1=\frac{b_2}{N^2N_1^2} \qquad c_1=\frac{c_2}{N^2N_1^3} \qquad d_1=\frac{d_2}{N^2N_1^3}$$

Eftersom en faktor p ej ingår i b_2 eller c_2 för $r>0$ resp. $s>0$, äro b_2 och N rel. primtal likasom c_2 och N_1. Men eljest kunna b_2, c_2 och d_2 innehålla faktorer från N eller N_1. Bortskaffas nämnarna i (13 a), erhålles

$$N^2N_1^3x^4-N_1b_2x^2-c_2x+d_2=0$$

Här finns ingen gemensam faktor till koefficienterna, eftersom en gemensam faktor till b_2 och c_2 varken finns i N eller N_1. Ekvationen är således identisk med (13). Härav synes, att varje primfaktor p i a måste ingå där till minst andra digniteten. Den kan samtidigt ingå i N och N_1. Är digniteten udda, har N_1 och således även b faktorn p. Sättes $y=NN_1x$, erhålles

$$y^4-b_2y^2-Ncy+N^2N_1d=0$$

som vi kortare skriva

$$y^4-By^2-Cy+D=0 \tag{15}$$

Denna ekvation skall således ha rötterna k_i. Med användning av (14) erhålles

$$B=-(k_1+k_2)(k_3+k_4)-k_1k_2-k_3k_4=(k_1+k_2)^2-k_1k_2-k_3k_4 \tag{16}$$

$$C=k_1k_2(k_3+k_4)+k_3k_4(k_1+k_2)=(k_1+k_2)(k_3k_4-k_1k_2) \tag{17}$$

Av (14) synes, att antingen två k_i äro jämna och två udda eller alla udda. I förra fallet har D minst två faktorer 2; B är udda och C jämnt (de jämna rötterna kunna väljas till k_1 och k_2). I senare fallet är D udda men B och C jämna. För 4 heltalsrötter fordras således, att C är jämnt och att B och D ha olika paritet. Vi skola undersöka koefficienterna närmare.

Antag först $k_1=2f_1$, $k_2=2f_2$ samt k_3 och k_4 udda. Då är

$$k_3+k_4=-2(f_1+f_2)$$

$$B=4(f_1+f_2)^2-4f_1f_2-k_3k_4; \quad C\equiv 2k_3k_4(f_1+f_2) \pmod 8$$

Om f_1+f_2 har λ faktorer 2, få k_3+k_4 och C vardera $\lambda+1$ faktorer 2.

Vidare blir för

$\lambda=0$: $k_4(k_3+k_4)\equiv 2$, men $k_4^2\equiv 1$ $\therefore k_3k_4\equiv 1 \pmod 4$
$\lambda=1$: $k_4(k_3+k_4)\equiv 4$, » $\therefore k_3k_4\equiv 3 \pmod 8$
$\lambda>1$: $k_4(k_3+k_4)\equiv 0$, » $\therefore k_3k_4\equiv -1$ »

$\lambda=0$: $B\equiv -k_3k_4\equiv 3 \pmod 4$
$\lambda=1$, udda f_i: $B\equiv -4-3\equiv 1 \pmod 8$
jämna f_i: $B\equiv 0-3\equiv 5$ »
$\lambda>1$, udda f_i: $B\equiv -4+1\equiv 5$ »
jämna f_i: $B\equiv 0+1\equiv 1$ »

Slutligen har D endast två, minst tre eller minst fyra faktorer 2, alltefter som f_1 och f_2 båda äro udda, det ena jämnt och det andra udda eller båda jämna.

Vi övergå till det fall, då alla k_i äro udda. Sättes

$$k_i=2g_i+1 \quad \text{blir} \quad \Sigma g_i=-2$$

$$D=\Pi(2g_i+1)=1+2\Sigma g_i+4\Sigma g_ig_j+\ldots\equiv 1 \pmod 4$$

$$C=\Sigma(2g_i+1)(2g_j+1)(2g_h+1)$$
$$=\Sigma 8g_ig_jg_h+2\Sigma 4g_ig_j+3\Sigma 2g_i+4\equiv 0 \pmod 8$$

$$-B=\Sigma(2g_i+1)(2g_j+1)$$

(Eftersom $\Sigma g_i=-2$, kan man indicera så, att $g_1+g_2\equiv 0$, $g_3+g_4\equiv 2 \pmod 4$, varav följer $g_1g_2\equiv -g_2^2\equiv 0$ eller -1, $g_3g_4\equiv 0$ eller 1 (mod 4) osv.) Men det blir kanske enklare på följande sätt.

$$B=-[k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3-(k_1+k_2+k_3)^2]$$
$$=k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3$$

Om man sätter $k_2+k_3=2h_1$, $k_1+k_3=2h_2$, $k_1+k_2=2h_3$

samt kvadrerar och adderar, erhålles

$$B=2(h_1^2+h_2^2+h_3^2)=2B_1$$

Men $h_1+h_2+h_3=k_1+k_2+k_3=$ udda tal, $\therefore B_1=$ udda tal.

Således har B endast en faktor 2. Vidare får B ej ha formen $2(8a+7)$, ty summan av tre kvadrater kan aldrig bli $8a+7$.

För udda B gälla således följande möjligheter (μ och ν ange antalet 2-faktorer i C och D):

$B\equiv$	3 (mod 4)	1	5	5	1 (mod 8)
μ	$=1$	$=2$	$=2$	$\geqq 3$	$\geqq 3$
ν	$\geqq 3$	$=2$	$\geqq 4$	$=2$	$\geqq 4$

Om däremot B är jämnt, skall det ha endast 1 men C minst 3 faktorer 2, och D skall vara $\equiv 1 \pmod 4$; den andra faktorn i B får ej ha formen $8n+7$.

Vi övergå till modylen 3. Om 3 ej är faktor i något k_i, är på grund av (14) enda möjligheten, att två k_i äro $\equiv 1$ och två $\equiv -1$. Antag

$$k_1=3g_1-1,\quad k_2=3g_2-1,\quad k_3=3g_3+1,\quad k_4=3g_4+1$$
$$\therefore\ \Sigma g_i=0 \tag{18}$$

Då är $D\equiv 1$. Enligt (16) är $B\equiv 4-1-1=2$. På grund av (18) blir

$$k_3k_4-k_1k_2=9(g_3g_4-g_1g_2)$$

Av (17) synes då, att C har faktorn 9.

Om endast ett k_i t. ex. k_4 har faktorn 3, ger (14)

$$k_1\equiv k_2\equiv k_3\equiv \pm 1$$

Sättes $k_i=3g_i\pm 1$ $(i\equiv 1,2,3)$ och $k_4=3f$, är

$$\sum_1^3 k_i=-3f,\quad \Sigma g_i=-f\mp 1$$

För $i,j=1,2,3$ erhålles då (mod 9)

$$\sum_{i\neq j} k_ik_j=\Sigma(3g_i\pm 1)(3g_j\pm 1)\equiv \pm 6\Sigma g_i+3=\mp 6f-3$$
$$k_1k_2k_3=\Pi(3g_i\pm 1)\equiv 3\Sigma g_i\pm 1\equiv -3f\mp 2$$
$$B=-(\Sigma k_ik_j+3f\Sigma k_i)\equiv -\Sigma k_ik_j\equiv \pm 6f+3$$
$$C=k_1k_2k_3+3f\Sigma k_ik_j\equiv k_1k_2k_3\equiv -3f\mp 2$$
$$D=3f\cdot k_1k_2k_3\equiv \mp 6f$$

För $f\equiv 0$ (mod 3) blir $B\equiv 3,\ C\equiv\pm 2,\ D\equiv 0$ (mod 9)
$f\equiv k_i\equiv\pm 1$ (mod 3) » $B\equiv 0,\ C\equiv\pm 4,\ D\equiv 3$ »
$f\equiv -k_i\equiv\mp 1$ » » $B\equiv 6,\ C\equiv\pm 1,\ D\equiv 6$ »

Om både k_3 och k_4 ha faktorn 3, fordras $k_1\equiv -k_2\equiv\pm 1$. Då är $B\equiv -k_1k_2\equiv 1$ och $C\equiv 0$ (mod 3) samt $D\equiv 0$ (mod 9).

Beträffande modylen 3 ha vi således funnit följande villkor. Antingen är $B\equiv 1$ och C har minst en, D minst två faktorer 3, eller är $B\equiv 2$, $D\equiv 1$ och C har minst två faktorer 3, eller äro B och D men ej C delbara med 3. I sista fallet skola resterna (mod 9) för resp. B, C och D vara antingen 3, ± 2, 0 eller 0, ± 4, 3 eller 6, ± 1, 6.

Om slutligen p är en udda faktor i C, väljes en rot k, som ej har faktorn p. Den ger

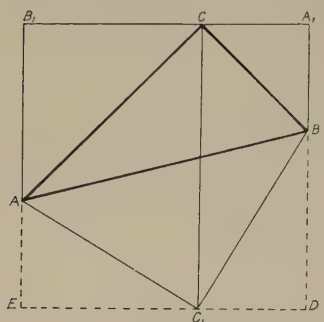
$$k^4-Bk^2+D\equiv 0 \pmod p$$
$$(2k^2-B)^2\equiv B^2-4D$$

Således skall B^2-4D antingen vara kvadratisk rest till p eller ha p till faktor.

Ett åskådligt bevis för Pythagoras' sats

Av fil. stud. Gösta Danielsson, Hälsingborg

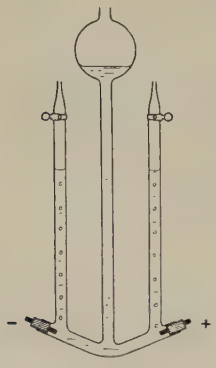
I stället för kvadrater uppritas på triangelns sidor likbenta rätvinkliga trianglar, dvs. *fjärdedelen* av kvadraterna. Till en början uppritas dessa trianglar endast på de båda kateterna AC och BC, varefter kvadraten A_1B_1ED fullbordas. Från C drages $CC_1 // A_1D$ och från C_1 linjerna C_1B och C_1A. Då är $\triangle BC_1D \cong \triangle C_1AE$, och $\triangle ABC_1$ är likbent och rätvinklig. Man inser lätt, dels att fyrhörningarna ABA_1B_1 och $BAED$ äro kongruenta, dels att $\triangle BCC_1 = \frac{1}{2}$ rekt. CC_1DA_1 och $\triangle ACC_1 = \frac{1}{2}$ rekt. CC_1EB_1. Då är fyrh. $ACBC_1 = \frac{1}{2}$ kvadr. A_1B_1ED och således fyrh. $ACBC_1$ = fyrh. A_1BAB_1. Borttages den gemensamma $\triangle ABC$, återstår $\triangle C_1AB = \triangle A_1BC + \triangle B_1CA$. Motsvarande likhet gäller då även för de fyra gånger större kvadraterna på triangelns sidor.



En apparat för elektrolys av saltsyra

Av lektor Bertil Englund, Uppsala

Det instruktiva försöket att visa klorvätets sammansättning genom elektrolys av saltsyra har som bekant den nackdelen att det med de vanliga apparaterna tar alldeles för lång tid att mätta lösningen med klor vid den positiva elektroden. (Om användning av gasbyretter se uppsats av Starck i Elementa *20*, 111 och Smith, Lärobok i oorganiska undervisningsexperiment, s. 200.)



I några år har vid Högre allm. lärov. i Uppsala använts en elektrolysör enl. figuren. U-rörets ben äro rätt korta (25 cm) och smala (8 mm). Vanliga kolstavar äro införda genom gummiproppar, och det är viktigt, att elektrodytorna äro små (blott 4—5 mm av staven innanför proppen). Apparaten fylls nästan upp till kranarna med utspädd saltsyra (1 del konc. och 9 delar vatten), mättad med koksalt. En ström på 0,5 A får gå genom lösningen i ca 20 min., under det att kranarna stå öppna.

Under tiden kan man iakttaga gasernas färg och löslighet. Då kranarna sedan stängas, sjunka vätskeytorna lika fort. För att se detta behöver man inte ha graderade rör, vilket ju gör tillverkningen billigare. Apparaten tillverkas efter mina anvisningar av Firma R. Grave i Stockholm.

Bokanmälningar

Johannes Malmquist, Valdemar Stenström och Sture Danielson, *Matematisk analys, Del II,* Analytiska funktioner och lineära differentialekvationer i det komplexa området, Natur och Kultur Stockholm, 1952, 451 s., kr. 72:—.

Av den nya lärobok i matematisk analys, vars första band utkom förra året och anmäldes i Elementas marsnummer 1952, har nu andra bandet utkommit. Det behandlar i två kapitel och ett appendix teorien för analytiska funktioner. I första kapitlet utvecklas den klassiska teorien med Cauchys integralsats som utgångspunkt. Åt de för tillämpningarna särskilt viktiga delarna av teorien, nämligen komplex integration och residukalkyl samt konform avbildning ägnas stort utrymme. De elliptiska funktionerna behandlas efter Weierstrass' metoder i ett kortare avsnitt, medan huvuddelen av dessa funktioners teori förts till ett appendix i slutet av boken. Första kapitlet slutar med ett avsnitt, som behandlar teorien för analytiska funktioner av flera variabler.

I det andra kapitlet behandlas teorien för ordinära lineära differentialekvationer i det komplexa området och de s. k. speciella funktionerna, som definieras som lösningar till vissa av dessa ekvationer. Detta kapitel utgör en värdefull handbok i dessa för den matematiska fysiken viktiga funktioners teori.

Författarna ha även i detta band lyckats väl med att ge en mycket klar, lättläst och logiskt sammanhängande framställning. Anmälaren har emellertid noterat ett par oklarheter, som böra påpekas. På sid. 56 påstås Liouvilles allmänna sats lyda: »Om för en hel funktion $f(z)$ gäller att $|f(z)| < M|z|_n$ för varje z, så är $f(z)$ en hel rationell funktion av högst graden n.» Det är visserligen sant. Emellertid följer av den givna förutsättningen t. o. m. att $f(z)=\text{konst} \cdot z^n$. Förutsättningen bör vara t. ex.: ... för varje z i en omgivning av ∞, ...

På sid. 55 och 125 skriva författarna, att en funktion $f(z)$ definierad i ett visst område konvergerar likformigt mot en

funktion $\varphi(\zeta)$ definierad på randen av detta område. Meningen torde vara, att φ är f:s kontinuerliga fortsättning, ett förhållande som enklast uttryckes genom att φ aldrig införes utan man säger: f är definierad och kontinuerlig i området och på dess rand samt holomorf i området.

Bokens obestridliga förtjänster i pedagogiskt avseende gör den utan tvekan väl lämpad att användas vid undervisningen i funktionsteori vid de tekniska högskolorna. Den är emellertid mer än en lärobok. Detta gäller i synnerhet det välskrivna andra kapitlet, som ger en utmärkt överblick över de speciella funktionerna och deras egenskaper och som därför måste intressera alla som ha anledning att matematiskt behandla tekniska eller fysiska problem. Boken får på så sätt också ett värde som uppslagsbok.

Hans Rådström

Arne Broman, *Berömda matematiska problem.* Verdandis småskrifter nr 521. Bonniers, Stockholm 1952, 64 s., kr. 4:50.

I förteckningen över Verdandiskrifterna nr 1—521 finner man sammanlagt nio häften sammanförda under ämnesgruppen Matematik och Statistik. En närmare granskning visar, att åtta av dessa närmast beröra statistik och filosofi. Den föreliggande skriften är alltså den första i serien, som ägnas åt ren matematik.

Som är att vänta av titeln innehåller boken en klassisk problemkavalkad: cirkelns kvadratur, vinkelns tredelning, kubens fördubbling, parallellaxiomet, primtalens antal och fördelning, de med passare och linjal konstruerbara regelbundna månghörningarna, pythagoreiska taltrippler och Fermats stora sats, femtegradsekvationen, fyrfärgsproblemet, kontinuumproblemet. Såvitt anmälaren vet, ha vi inte på svenska en populär och samlad framställning av dessa frågor. De flesta av dem ha dock fascinerat både fackmän och amatörer alltsedan den grekiska matematikens glansdagar, och en smula kunskap på detta område måste anses höra till allmänbildningen. Denna Verdandiskrift fyller därför ett — låt oss hoppas av ej alltför få — »länge känt behov». Detta behov fylles dessutom på ett mycket tillfredsställande sätt, ty boken är roande och lättläst utan att stringensen fått sitta emellan, och förf. har sovrat det stora materialet med pedagogisk omsorg. En person med goda realexamenskunskaper i matematik bör kunna förstå det mesta, även några av de inströdda bevisen, t. ex. Pythagoras' bevis för irrationaliteten hos $\sqrt{2}$, eller Euklides' bevis för att det finns oändligt många primtal — två teorem, som efter mer än 2000 år ännu bevara sin enkla skönhet. Matematikintresserade gymnasister bör kunna läsa boken med särskilt god behållning.

Den ovannämnda tillfredsställelsen inför denna nya populärvetenskapliga skrift kan emellertid ej utsträckas till att gälla även inköpspriset. Vi uppställa frågan: Vad skulle ett häfte av Elementa kosta, om dess pris sattes i proportion till Verdandihäftet nr 521? Detta problem torde, i likhet med flera av de i boken behandlade, vara olösligt, i varje fall i praktiken. *Tord Hall*

The Teaching of Trigonometry in Schools. A Report prepared for the Mathematical Association. Bell & Sons, London 1950, Pp. 100, 6 s. 6 d.

The Mathematical Association i England har utgivit en serie böcker behandlande en del metodiska frågor i samband med matematikundervisningen. Dessa »Reports» utarbetas av en nämnd av matematiklärare, varför de grunda sig på en omfattande pedagogisk erfarenhet. Ehuru förhållandena äro något annorlunda än här i Sverige, ha vi alla skäl att ta del av de synpunkter, som framföras, och, i den mån det går, utnyttja dem vid vår undervisning.

I början omnämnas vissa fördelar med att börja trigonometriundervisningen på ett mycket tidigt stadium, i 12—13 års åldern. Den har ett konkret underlag i fältmätningar, den ger träning i att slå i tabeller, ger stoff till grafisk framställning, skänker god underbyggnad till studiet av mekanik (bl. a. kraftparallellogrammen och kraftmoment) och fysik (ljusets brytning). Geometristudiet kan vidare med fördel ske i samband med trigonometri, om man släpper efter på fordringarna i bevisföring och mera låter elevernas lust att själva göra mätningar och undersökningar komma till sin rätt. Trigonometrin sammanknyter till ett helt de olika grenarna av matematiken: aritmetik, algebra och geometri. Skälen verka vägande, varför det skulle vara lockande att få göra ett försök med en sådan uppläggning av matematikundervisningen även här. Enligt min åsikt finns det inga hinder för att ett sådant försök utföres i enhetsskolans 7:de och 8:de klass, där kurserna äro mera tänjbara än i realskolan. En sådan uppläggning skulle f. ö. gå helt i stil med de riktlinjer, som angivits för matematikundervisningen i enhetsskolan.

Boken innehåller många värdefulla råd och uppslag för att göra undervisningen intressant och givande. Jag vill i detta sammanhang själv lämna ett litet bidrag:

Vid härledningen av $\sin(\alpha+\beta)$ ur $\cos(\alpha-\beta)$ ersättes α med $90°-\alpha$. Sedan utnyttjas formlerna $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$ och $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$. Mången lärare försummar här att visa, att

dessa formler gäller generellt. Ur $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ följer emellertid $\cos(90°-\beta)=\cos 90°\cos\beta+\sin 90°\sin\beta=\sin\beta$ och genom insättning i denna formel av $\beta=90°-\alpha$ erhålles $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$. Härledningen av $\sin(\alpha+\beta)$ blir härigenom strängt utförd för alla vinklar α och β.

Jag har funnit boken mycket stimulerande och rekommenderar den varmt till alla matematiklärare. *Fredrik Ehrnst*

H. L. Hamburger and M. E. Grimshaw, *Linear transformations in n-dimensional vector space,* Cambridge University Press, Cambridge 1951, Pp. 195, 25 s. net.

En utmärkt inledning till studiet av den abstrakta Hilbert-rymden. Problemen, metoderna och terminologien äro desamma som komma till användning inom teorien för den oändligt-dimensionella rymden, och författarna ha t. ex. avsiktligt undvikit att nyttja determinanter, då dessa icke lämpa sig för generalisering från n dimensioner till Hilbert-rymden.

Efter ett inledande kapitel om lineära höljen och lineära transformationer i allmänhet följer ett speciellt studium av självadjungerade, unitära och normala transformationer. Det tredje kapitlet ägnas den klassiska spektralframställningen av en självadjungerad transformation, studium av resolventen samt operatorkalkyl med utgångspunkt från en självadjungerad transformation. Därefter behandlas det besvärliga problemet om framställning av en godtycklig lineär transformation i kanonisk form, varvid en del helt nya resultat framläggas. I det sista kapitlet studeras frågor som sammanhänga med införandet av en annan metrik i den n-dimensionella rymden, varvid den inre produkten mellan enhetsvektorerna förknippas med en positiv definit självadjungerad transformation. Resultaten tillämpas på teorien för svängande system. *Sven Hilding*

G. Bouligand et J. Rivaud, *L'enseignement des mathématiques générales par les problèmes, I.* Librairie Vuibert, Paris 1951, VI + 372 p., 2000 fr.

Då och då hör man matematikstuderande efterlysa läroböcker innehållande lösta problem, således ej vanliga exempelsamlingar utan böcker, där teoretiska avsnitt genomgås i anslutning till lämpligt valda exempel. Det är här fråga om en ny bok av denna typ, som innehåller kapitel om koordinatsystem, vektoralgebra och vektoranalys, determinanter, elementära funktioner, differential- och integralkalkyl, differentialekvationer, Taylors formel med tillämpningar,

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Subskription enklast genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 12:50, pr häfte kr. 3:50. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Pärmar av grön klot à 2:50 + 20 öre i porto; varje pärm är avsedd för två årg.: 1—2, 3—4, osv.

Tidigare årg. Vänd Eder direkt till red. med en förfrågan. Av årg. 1—13 äro flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14—30 tills vidare kr. 8:—, för 31—34 kr. 10:—.

Red.-kommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, byrådirektör S. Comét, lektor Torsten Jönsson, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och utgivare: C. E. Blom. Red. o. exp. Karlbergsv. 16, Stockholm.

Särtryck ur ELEMENTA:

1. A. Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1:—.
2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1:—.
4. J. Tandberg, Om vinkelns tredelning. Slut.
5. G. Ljunggren, Gasskyddets kemi kr. 0:80.
6. S. Comét, Matrisräkning, kr. 1:60
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1:40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1:40.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 1:40.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.

Problemhäften för åren 1943—50 à kr. 1:—, för 1951 à kr. 1:20. Innehåll: Student- o. realex.uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.
För alla särtryck tillkommer 15 öre i porto.

Vid pågående inventering

av svenska biblioteks innehav av Elementa-årgångar har det bekräftats — vad man så väl vet förut — att enda sättet att bevara tidskrifter är att binda dem. Det är nu mycket dyrare att göra det än förr, men gör det likafullt, ty att fylla uppkomna luckor blir kostsamt, om det överhuvud lyckas.

Pärmar finnas (se ovan), men rådgör med Er bokbindare. Det kanske blir endast obetydligt dyrare att binda i eget band, vilket ju har den fördelen att den personliga smaken då bättre kan tillgodoses. För övrigt är Elementas lager av pärmar ej stort.

Insänd litteratur

Cambridge University Press, London 1952:

G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya, *Inequalities*, Sec. Ed. Pp. 324, 27 s. 6 d. net.

W. V. D. Hodge—D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry, Vol. II.* Pp. 394, 42 s. net.

E. H. S. Burhop, *The Auger Effect.* Pp. 188, 27 s. 6 d. net.

F. P. Bowden—A. D. Yoffe, *The Initiation and Growth of Explosions in Liquids and Solids.* Pp. 104, 22 s. 6 d. net.

John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London 1952:

Lewis R. Koller, *Ultraviolet Radiation.* Pp. 270, $ 6.50.

R. J. Stephenson, *Mechanics and Properties of Matter.* Pp. 371, $ 6.00.

Dana's *Manual of Mineralogy.* Sixteenth Ed. Pp. 530, $ 6.00.

S. A. Schelkunoff, *Advanced Antenna Theory.* Pp. 216, $ 6.50.

S. A. Schelkunoff & H. T. Friis, *Antennas, Theory and Practice.* Pp. 639, $ 10.00.

Imperfections in Nearly Perfect Crystals, Symposium held at Pocona Manor, Oct. 12—14, 1950. Pp. 490, $ 7.50.

Biochemical Preparations, Vol. II. Editor-in-Chief: E. G. Ball. Pp. 109, $ 3.00.

H. E. Huntley, *Dimensional Analysis.* Macdonald & Co., London 1952, Pp. 158, 20 s. net.

Carl Mahr, *Anorganisches Grundpraktikum für Chemiker und Studierende der Naturwissenschaften.* Verlag Chemie, Weinheim/Bergstrasse 1952, 332 S., Kart. DM 15: —.

A. Vogel, *Klassische Grundlagen der Analysis.* Hirzel Verlag, Leipzig 1952, DM 8.50.

F. Klages, *Lehrbuch der organischen Chemie.* I. Band. Systematische org. Chemie. Erste Hälfte. W. de Gruyter & Co., Berlin 1952, 531 S., DM 68.—.

E. Lohr, *Mechanik der Festkörper.* W. de Gruyter & Co., Berlin 1952, 483 S., DM 39.60.

G. Lindhe, *100 försök.* Handledning i experiment i fysik och kemi för folkskolan. Almqvist & Wiksells Skolböcker, Hugo Gebers Förlag, Stockholm 1952, 143 s.

Almén—Nilsson, *Fysikaliska problem.* För realgymnasiet. Sv. Bokförlaget, Stockholm 1952, 100 s.

Moll—Starck, *Kemi för realgymnasiet.* 4:e uppl. Sv. Bokförlaget, Stockholm 1952, 398 s.

Foghammar—Sjöstrand, *Matematiska skrivningsuppgifter,* för reallinjens allm. kurs. 3:e uppl. Seelig & Co., Stockholm 1952, 106 s., kr. 4: 50.

Stig Lindholm, *Optik.* Handledning för demonstrationsförsök med Norstedts experimentsats. Norstedt & Söners Skolmaterielavd. Stockholm 1952, 64 s., kr. 4: 80.

N. Ivan, *Vad examinatorerna fordrar i realexamen.* A. V. Carlsons Bokförlag, Stockholm 1951, 136 s., kr. 6: 50.

Göran Beskow, *Studieplan i fysik för enhetsskolans mellan- och högstadium.* Bergwalls Förlag, Stockholm 1952, 80 s., kr. 5: 50.

Statens Naturvetenskapliga Forskningsråds årsbok 1950/51, femte årg. Nordiska Bokhandeln, Stockholm (i distribution), 245 s., kr. 7: —.

Dædalus, Tekniska Museets årsbok 1952, 179 s. + annonsavd.

Acta Polytechnica. Utg. av IVA, Stockholm 1951: S. Nordengren, Studies on the Production of strong Phosphoric Acid etc. (Nr 90, 11 p.); A. Bjerhammar, Application of Calculus of Matrices to Method of Least Squares (Nr 91, 86 p.); Å. Linder, Tall Oil Refining (Nr 95, 56 p.).

funktioner av flera variabler, linje- och dubbelintegraler, ekvationsteori och en del geometriska tillämpningar. Förmodligen på grund av lärogången vid de institutioner, som boken närmast är avsedd för, har en del av stoffet brutits ut och behandlas mer schematiskt i en inledande avdelning. I anslutning till varje kapitel gives även uppgifter för självständig lösning, sammanlagt något över 200. Många av dessa saknar tyvärr svar.

Urvalet överensstämmer ej så väl med svenska kurser. En bok av denna typ kan ju ändå aldrig användas som enda lärobok, men som hjälp bredvid vid inlärande eller repetition av svårare kursavsnitt torde den kunna göra synnerligen goda tjänster även i vårt land.

Ytterligare en del är planerad och skall förutom kapitel av ovannämnd typ även innehålla samlade examensproblem att användas vid repetition. *Tord Ganelius*

A. Durand, *Sur les cercles bitangents à la parabole.* Librairie Vuibert, Paris 1952, 32 p., 200 fr.

I denna lilla bok ha samanförts några små uppsatser i Journal de math. élémentaires, årg. 71 (1946—47), där de åtföljdes av ett antal olösta ortproblem (några även i rymden), lämpliga som exempel på teorien. Förf. har i boken något utökat denna lista och infört fullständiga lösningar. Behandlingsmetoden är den vanliga franska, som med förkärlek begagnar »la géométrie», men även anlitar koordinaträkning. Den eleganta framställningen är alltigenom elementär, varför arbetet med stor behållning kan läsas av en svensk gymnasist med intresse för ämnet.

Josef Andersson

John W. Cell, *Analytic Geometry.* 2nd ed. Wiley & Sons, New York 1951, Pp. XII+326. $ 3.75.

J. W. Cell är en tekniskt inriktad matematikprofessor, som har ägnat sig åt att utveckla åskådliga metoder inom matematikundervisningen. Detta har satt tydliga spår i denna bok, som omfattar grunderna av den analytiska geometrin i två och tre dimensioner: figurerna är många och goda och exemplen har ofta en teknisk anstrykning. Underligt nog är dock derivata och vektor begrepp, som ej omnämnes.

Huvudvikten läggs vid konstruktion av kurvor i olika koordinatsystem. Andragradskurvorna kommer med som speciella exempel men knappast något om deras karakteristiska egenskaper. Ett

kapitel ägnas åt interpolation och anpassning av kurvor till empiriska värden. Rymdgeometrin ges en kortfattad behandling, som kulminerar i påvisandet av de rätlinjiga generatriserna på den enmantliga hyperboloiden.

Författarens metod att ge färg åt problemen är förbluffande men rätt roande: en speciell exponentialfunktion är inte bara en funktion utan ett uttryck för befolkningsvariationerna i Portland, Oreg., och en formel för triangelytan säges användas för beräkning av hur mycket jord, som skall fraktas bort vid vägbyggnad! Boken överflödar av studieanvisningar och exempel med svar; en finess, som kan diskuteras är de partiella svaren. Söker man t. ex. en rät linje ges ej ekvationen utan en punkt på linjen.

Boken är trevlig att läsa, men innehållet är, som framgår ovan, rätt tunt; den, som sysslar med kurvritning och grafiska metoder, kan dock säkerligen finna tips av intresse i den.

Tord Ganelius

Donald P. Eckman, *Industrial Instrumentation.* John Wiley & Sons, Inc., New York, Chapman & Hall, Ltd., London, 1950, Pp. VII+396, $ 5.00.

Industrien har under de sista två decennierna allt mer inriktats på flytande tillverkning, dvs. enligt principen: så få ingripanden av människor som möjligt på vägen från råvara till färdig produkt. (Härvid åsyftas då inte speciellt svenska förhållanden.)

Denna utveckling har medfört successivt ökade behov av industriell instrumentering, avseende bl. a. kontinuerligt mätande och registrerande instrument, metoder för automatisk kontroll av tillverkningsprocesser samt anordningar för automatisk driftsstyrning av produktionsavdelningar och hela företag.

Ingen mätmetod, ingen fysikalisk upptäckt, från Archimedes' princip till kärnfysikens senaste rön, har undgått att bli granskad av de män, vilkas uppgift är att finna metoder för effektiviserad produktion, dvs. för anpassning till den västerländska människans ständiga pockande på ökad komfort och för lösning av det trängande problemet att lyfta huvudmassan av jordens befolkning över svältgränsen.

Fysikläraren behöver inte stå i förlägenhet inför den fråga, som då och då framställes av materialistiskt inställda eller kunskapsskygga elever: »Vad har detta egentligen för praktiskt intresse?» — All fysik har praktisk betydelse. (Men det är lämpligt att ha exempel till hands för verifikation av påståendet.)

Eckmans arbete är en grundläggande, hypermodern lärobok,

som beskriver produktionsteknikens brokiga flora av instrument och mätmetoder. Framställningen är begränsad till de fysikaliska, konstruktionsmässiga och funktionella principerna med uteslutande av principiellt oväsentliga utförandedetaljer. Instrumentering för automatisk och delvis automatisk tillverkningskontroll och driftsstyrning, som Eckman tidigare skrivit en bok om (*Principles of Industrial Process Control*, Wiley 1945, $ 3.75), har i föreliggande arbete behandlats summariskt i ett kort avslutande kapitel.

Boken är särdeles njutbar för en fysiker; den är skriven med stram elegans men med omisskännlig entusiasm för ämnet, och den är förstklassigt illustrerad. Den innehåller en värdefull problemsamling (170 exempel).

Eckman var i åtskilliga år forskningsingenjör vid det välkända företaget The Brown Instrument Company. Han är numera lärare vid Cornell University och samtidigt anställd som konsulterande i instrumentfirman Conoflow Corporation i Philadelphia. Dylik dubbelanställning är vanlig i Amerika och har visat sig vara ett utmärkt arrangemang för ömsesidig stimulans; systemet är dessutom ekonomiskt fördelaktigt för såväl industrien som utbildningsanstalterna och lärarna. *Torsten Jönsson*

Robert Quinly Gregg—Harry Emmons Hammond—Robert Hartwig Frost, *A Manual of Electrical Measurements.* Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge Mass. 1950, Pp. 128, $ 3.00.

Melville B. Stout, *Basic Electrical Measurements.* Prentice-Hall, Inc., New York 1950, Pp. viii+504, $ 7.75.

P. M. Pflier, *Elektrische Messgeräte und Messverfahren.* Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1951, xii+193 sid., DMark 21.—.

Jacob H. Ruiter, Jr., *Modern Oscilloscopes and Their Uses.* Murray Hill Books, Inc., New York 1949, Pp. xviii+326, $ 6.00.

Laborationsövningarna i vilken naturvetenskaplig och teknisk disciplin som helst ha en tvåfaldig uppgift, nämligen dels att lära eleven hantera instrument på ett vettigt sätt och att bibringa honom förtrogenhet med mätmetoder och experimentell teknik, dels att jämte lektionsexperimenten bidraga till att underlätta konkretiseringen av elevens föreställningar. Uppläggningen av vissa moment av den teoretiska delen av ett ämne kan ibland förorsaka bekymmer, men i allmänhet är det den experimentella undervisningen och framförallt det ur effektivitetssynpunkt betydelsefulla samspelet mellan »läskurs» och laborationsövningar som ställer de

största kraven på läraren. Om därtill såsom vid våra högre tekniska läroverk fråga är om yrkesutbildning, så är det ytterst väsentligt, att laborationsövningarna anknyta till metoder som äro aktuella i praktisk verksamhet. Man är därför alltid tacksam för att få del av andras erfarenheter, och man välkomnar varje mättekniskt arbete, ty som regel hittar man någon nyhet och får något uppslag till förbättring av sin undervisning. Särskilt stimulerande är den angloamerikanska litteraturen, även om läsningen av dylika böcker ibland ger anledning till pessimistiska betraktelser över alla de skrankor av ekonomisk och annan art, som hindra den svenske läraren att ge utlopp åt sin experimentlust.

Den första av ovannämnda fyra böcker är en laborationshandbok; den ger anvisningar för ett antal laborationer i elektrisk mätteknik, motsvarande vad svårighetsgraden beträffar de enklare av laborationerna på våra högre tekniska läroverks elektrotekniska linjer.

Professor Stout behandlar i sin lärobok utförligt och lättläst de vanliga elektriska mätmetoderna samt meddelar en myckenhet instrumentkunskap. Framställningen är med den valda begränsningen (elektronisk mätteknik har medtagits i jämförelsevis mycket obetydlig omfattning) fullt up to date. Boken innehåller en rikhaltig och värdefull samling problem. Kunskaper i elementär växelströmsteori, inklusive räkning med komplexa storheter, förutsättas.

Pfliers bok är en högklassig och överdådigt illustrerad handbok, som uppgives vara skriven för studenter och för folk, som endast tillfälligtvis behöver syssla med elektriska mätningar. Den är sålunda avsedd för en bredare publik än Albert Palms välkända arbete *Elektrische Messgeräte und Messeinrichtungen* (Springer-Verlag, 1. Aufl. 1937, 3. Aufl. 1948, DM 21.—; Palm har senare utgivit *Registrierinstrumente,* Springer 1950, DM 19.50, samt *Elektrostatische Messgeräte,* G. Braun, Karlsruhe 1951, DM 10.50). Pflier utesluter helt den elektroniska mättekniken och håller sig, vad växelströmsläran beträffar, väsentligen till kraftfrekvensområdet. — Ett tidigare, ytterst värdefullt arbete av Pflier är *Elektrische Messung mechanischer Grössen* (Springer, 1. Aufl. 1940, 3. Aufl. 1948, DM 30.—).

Ruiters oscillografinstruktion kan inte lovordas nog högt; den är den idealiska läroboken. Var och en som har med katodstråloscillografer att göra, från nybörjaren på radioserviceverkstaden till mätspecialisten på forskningslaboratoriet, bör ha tillgång till denna bok. Den förutsätter nästan inga kunskaper i fysik. Men man skall läsa den på arbetsplatsen med oscillografen framför sig, inte i gungstolen. *Torsten Jönsson*

J. R. Davy, *Industrial high vacuum*, Sir Isaac Pitman and Sons, Ltd., London, 1951, VIII+Pp. 243, 25 s. net.

Första hälften av detta arbete utgör en beskrivning av vakuumpumpar, vakuumtekniska konstruktionselement (såsom packningar och ventiler), instrument för vakuummätning, metoder för läcksökning m. m. Den andra hälften av boken ger framför allt en mycket god orientering över ett flertal industriella tillämpningar av vakuumförångningstekniken. Exempel härpå är framställning av speglande ytor, beläggning av optiskt glas med antireflexhinnor och halvgenomskinliga hinnor samt framställning av tunna ledande skikt för motstånd och kondensatorer. Författaren är chefsfysiker vid en firma, vars tillverkning faller inom detta område, och är väl förtrogen inte bara med de fysikaliska utan även med de tekniska detaljerna. Andra avsnitt behandlar molekylardestillation, vakuummetallurgi och vakuumtorkning. På några sidor i slutet av boken belyses på basis av den kinetiska gasteorien några elementära principer för dimensionering av vakuumsystem.

De flesta kapitlen är försedda med litteraturhänvisningar; man skulle möjligen önska flera sådana åtminstone i bokens första avsnitt.

Boken har goda illustrationer och är trevligt skriven. Alla vakuumtekniskt intresserade, med eller utan anknytning till behandlade specialområden, kan läsa arbetet med behållning.

Hugo Atterling

S. G. Starling and A. J. Woodall, *Physics*. Longmans, Green and Co., London 1950, 1300 sid. med 766 fig. och 11 planscher, 42 s. net.

Det kan nog vara en fördel att samla hela fysikkursen i ett band, men med ett så högt sidantal som 1300 blir det hela något ohanterligt. Boken är avsedd för ett stadium, som närmast motsvarar fordringarna för två betyg i kandidatexamen, och innehållet är grupperat på fem huvudavdelningar: allmän fysik, värme, ljus, ljud och elektricitet, var och en omfattande respektive 121, 307, 371, 127 och 308 sidor. Dessutom tillkommer tabeller och 338 övningsexempel (utan svar). Atomfysiken har icke erhållit någon huvudrubrik utan ingår som en del av elektricitetsläran och omfattar endast 100 sidor, vilka fördelats på fyra kapitel: elektroner, röntgenstrålar, radioaktivitet samt atomer och strålning.

Den klassiska fysiken dominerar således framställningen. Medan exempelvis elektronmikroskopet omnämnes på två rader och cyklotronen tilldelas 1 $\frac{1}{3}$ s. samt kosmisk strålning och kärnfysik får nöja sig med 4 s. var, behandlas olika slags pendlar och pendel-

korrektioner på 14 s., beskrives tolv kalorimetertyper och kalorimetriska mätmetoder på 22 s. samt elva typer av elektriska mätbryggor för bestämning av R, L och C på 11 s. Relativitetsteorien behandlas summariskt på 8 s., vilka skjutits in mellan radiorören och comptoneffekten.

I ett så stort arbete som detta, kan man naturligtvis finna detaljer, som kan diskuteras. — Om man vid bestämningen av vattenångans, vattnets och isens trippelpunkt tager hänsyn till fryspunktsnedsättningen på grund av lufttryckets inverkan, bör man även införa motsvarande korrektion på grund av den i vattnet lösta luften. — Det är opraktiskt att ständigt införa värmeekvivalenten i termodynamiska ekvationer, man kan ju mäta värme och arbete i samma enhet. — Härledningen av ljusbrytningen i en tunn lins är inkonsekvent så tillvida, att linsytornas radier anges med sina tecken, dvs. att formeln endast härledes i specialfall, i stället för att radierna behandlas såsom algebraiska storheter, då man snabbt når fram till den generella formeln. — I kapitlet om ljushastigheten saknar man de moderna metoderna för bestämning av ljusets hastighet med hjälp av Kerr-cell (se E. Bergstrand: Om ljushastighet och avståndsmätning, Kosmos, 16, 1949).

Men om vi bortse från den moderna fysikens styvmoderliga behandling och i stället uppfattar boken som en lärobok i klassisk fysik, är det icke någon tvekan om att vi här stå inför ett ovanligt gediget arbete. Vissa områden av den experimentella fysiken är skrivna med en så utomordentlig noggrannhet att de kan jämföras med läroböcker i praktisk fysik i stil med Kohlrauschs bekanta arbete. Detta gäller exempelvis metoder för bestämning av inre friktion, temperaturmätningar samt kalorimetriska, optiska och elektriska konstanter. Här finner man nyttiga anvisningar för laborationer och demonstrationsförsök. Även vissa delar av den teoretiska fysiken, t. ex. termodynamik och statistisk mekanik, behandlas mer ingående än vad som vanligen förekommer i elementära läroböcker. Såsom uppslagsverk betraktad är boken inom flera avsnitt i nivå med exempelvis Grimsehl-Tomaschek.

Följande detaljer kan vara av intresse. — Inledningskapitlet börjar med några sidor »fysikalisk matematik», omfattande vektorer, differentialekvationer och symboliska räkningar med komplexa tal. De senare användes vid studiet av bl. a. interferensfenomen och växelströmmar. — Cgs-systemet användes genomgående, men andra system omnämnes. — Text med fin stil förekommer mycket sparsamt, vilket förmodligen är ett resultat av en grundlig sovring av innehållet. — Figurerna är små men tydliga

och vissa av planscherna, särskilt böjningsbilderna, är vackra och instruktiva.

De studerande, som skall lära in och förstå de mängder av begrepp, härledningar och tillämpningar vilka möter på vägen in i fysikens kunskapsområden, har stor nytta av författarnas pedagogiska erfarenhet, vilken satt sin prägel på såväl enskilda detaljer som stora sammanhang. *B. Grundström*

C. Candler, *Modern Interferometers.* Hilger & Watts Ltd., London 1951, 502 p., 57 s. 6 d. net.

En uttömmande monografi över interferometrin existerar inte, och den föreliggande boken avser att till en del täcka denna brist. Dock har författaren begränsat sig till de instrumentella konstruktionerna men behandlar i anslutning till dem de teoretiska förutsättningarna, mången gång på ett mycket föredömligt sätt.

Det imponerande erfarenhetsmaterial, som engelsk fysikalisk optik och instrumentutveckling har samlat, ligger till grund för stoffets vederhäftiga behandling. De tekniska tillämpningarnas problemställningar följas oftast, men även mera »akademiska» undersökningar refereras. Bibliografin — ovanligt nog även innefattande den på ryska utkomna litteraturen — är inte konsekvent förd längre fram än till omkring 1947, vilket gör, att man inte säkert finner vad man söker av de senaste framstegen, till exempel inom multipelinterferometrin.

Candler är spektroskopist och har därför särskilt nyttigt stoff att redovisa i fråga om ljuskällor, upplösningsförmåga och de höga ordningarnas interferometri. Förslaget att införa enhetsbeteckningen Rydberg (R) för vågtalet cm^{-1} kan ju se trevligt ut ur svensk synpunkt, men anmälaren vågar inte ha någon mening i frågan, om det vore praktiskt. *Erik Ingelstam*

W. D. Chesterman, *The photographic study of rapid events*, Oxford at the Clarendon press 1951. Pp. xiii+168, 32 plates, 21 s. net.

Boken är den nionde i en serie, redigerad av W. Jackson, H. Fröhlich och N. F. Mott, »Monographs on the physics and chemistry of materials» — »intended to summarize recent results in academic or long-range research in materials and allied subjects in a form that should be useful to physicists in Government and industrial laboratories.»

Serien har startat intressant och mångsidigt, varför de flesta forskare (icke endast materialintresserade) kan rekommenderas iakttaga vad den bjuder på även i framtiden.

Föreliggande monografi, som behandlar en grupp av våra viktigaste instrument för förstoring av tidsskala, begränsar sig till metoder för direkt fotografisk registrering av försöksobjektet och dess beteende och visar oss hur tekniken här brottas med de två fundamentala faktorerna bildfrekvens och exponeringstid.

Författaren börjar sin klara och systematiska framställning med klassificering av studieobjekten, anställer betraktelser över begrepp såsom hög hastighet, snabba förändringar, kort varaktighet, presenterar exempel på fenomen ordnade i hastighetsskala (translation) och i tidsskala (hela förloppets varaktighet) samt företager gruppering av olika fotograferingsmetoder med avseende på deras tidsupplösningsförmåga. I särskilda kapitel avhandlas medelsnabba kameror med intermittent och med kontinuerlig filmframmatning, ljuskällor och belysningsteknik, val av fotografiska material, upptagning av enstaka bilder och synkroniseringsproblem, trumkameror, gnist- och slirfotografi. Slutligen gives en stimulerande resumé över tillämpningar inom vitt skilda vetenskapsgrenar och diskuteras snabbfotograferingsteknikens anpassningsmöjligheter och utvecklingstendenser. *Gillis Huss*

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 29, 1951, 212 s., kr. 12:—.

I bokens första uppsats skriver fil. dr Anna Beckman om fjorårets nobelpris i fysik och kemi. I den följande beskriver civiling. Torsten Wilner en del experiment, som kunna utföras med enkla, till stor del hemmagjorda apparater. Några av försöken torde vara lämpliga uppgifter för enskilt arbete.

Den viktigaste metoden att studera atomkärnornas struktur och energiförhållanden består i att man mäter energien hos de partiklar och strålningskvanta, som utsändas vid kärnomvandlingar. Under de senaste åren har ett nytt, utomordentligt känsligt mätinstrument konstruerats, den s. k. scintillationsspektrometern. Den beskrives av civiling., fil. mag. A. E. Johansson. Strålningen, som skall undersökas, får infalla mot en fluorescerande kristall, där den ger upphov till ljusblixtar (jämför spintariskopet!). Dessa omvandlas av en fotokatod till strömimpulser, vilka förstärkas med en elektronmultiplikator. Sistnämnda instrument, som kan ge miljonfaldig förstärkning, grundar sig på det sedan femtio år kända faktum, att en kropp, som träffas av en elektronstråle, utsänder sekundära elektroner. Om fasta kroppars sekundärelektronemission handlar en artikel av fil. kand. Seth Berglund.

Instrument för påvisande av enstaka partiklar och strålnings-

kvanta avge i regel elektriska impulser, som äro statistiskt fördelade i tiden och som följa efter varandra med ofta mycket små tidsintervall. Hur det går till att räkna och registrera sådana impulser beskrives av prof. Per Ohlin.

Den kärnfysikaliska forskningens snabba framsteg har ju möjliggjorts av att man lyckats konstruera apparater för acceleration av laddade partiklar till mycket höga hastigheter. Civiling. Allan Bergstedt redogör för hur de modernaste linjära acceleratorerna arbeta, med vilka man kan uppnå ännu högre energier än med de cykliska (cyklotroner, synkrocyklotroner, betatroner), där strålningsförlusterna, som förorsakas av att partiklarna röra sig i krökta banor, sätta en övre gräns för prestationsförmågan.

De senaste årens forskningar om mesonerna, som spela en så viktig roll för förklaringen av de sammanhållande krafterna mellan atomkärnans beståndsdelar, redovisas av doc. Björn Bruno. Man vet, att det existerar s. k. π-mesoner, vars massa är omkring 275 gånger så stor som elektronens massa, och s. k. μ-mesoner, vars massa är omkring 212 elektronmassor, och tror sig ha påvisat s. k. τ-mesoner, vars massa är omkring 1000 elektronmassor.

Tekn. lic. Gunnar Lindström bidrar med en uppsats om den nyare kvantelektrodynamikens experimentella grundvalar och fil. lic. Inga Fischer med en om den kemiska bindningen.

En översikt över äldre och nyare teorier, som försöker lösa det gamla problemet om det jordmagnetiska fältets ursprung, ges av tekn. lic. Stig Lundquist, och i bandets sista uppsats skriver doc. Erik Ingelstam om precisionsmätning med interferens- och faskontrastoptik. *Karl Sjögren*

Nils Evermark, *Mekanik och hållfasthetslära.* Gleerups, Lund 1951, 134 s., kr. 6:—.

Rektor Nils Evermark vid Norrköpings Stads Skolor för Yrkesundervisning har tidigare framträtt som författare av läroböcker i matematik för olika stadier, från enklaste yrkesräkning till integral- och differentialkalkyl, och han har även skrivit en liten bok i fysik för lärlings- och yrkesskolor. Till denna sin omfattande produktion har han nu fogat en elementär lärobok i mekanik och hållfasthetslära i den goda avsikten att tillgodose ett konstaterat behov av en lättfattlig och prisbillig, elementär lärobok i dessa båda ämnen. Enligt förordet är boken avsedd för bl. a. förmans- och verkmästarkurser, de praktiska mellanskolornas tekniska linjer och vissa tekniska skolor. Boken är av intresse därför, att den utgör ett försök att göra mekanikens och hållfasthetslärans grun-

der tillgängliga dels för relativt unga och omogna elever och dels för äldre personer i fortsatt yrkesutbildning, i båda fallen för lärjungar med tämligen bristfälliga kunskaper i matematik och fysik.

Det är absolut icke någon lätt uppgift att på ca 125 vanliga läroboksidor göra en god framställning av två ämnen, som äro så pass svårfattliga för nybörjare — oavsett åldersstadiet — som mekanik och hållfasthetslära. Förf. har givit statiken ca 40, dynamiken ca 30 och hållfasthetsläran ca 55 sidor. Ca 200 övningsexempel ingå, och dessutom har förf. inskjutit ett stort antal genomräknade exempel, vilket bör antecknas som en förtjänst. Det har sannolikt varit förf:s mening, att boken även skall kunna användas vid självstudier. Ett antal frågor i slutet av varje kapitel såsom i korrespondensbrev antyder också denna hans avsikt.

Boken uppfyller väl kravet på att vara elementär och någorlunda prisbillig, men lättfattlig är den knappast, och ur pedagogisk synpunkt uppvisar den flera brister. Den deduktiva delen av framställningen är alltför begränsad och schematisk för att kunna ge någon behållning, och det är ej troligt att en elev på egen hand skall kunna förvärva någon förståelse för de båda ämnena eller erhålla någon fast grund att bygga vidare på. Formelkunskapen dominerar, och uttryck som »För detta slags rörelse gäller ekvationen:» eller »För beräkning av kraftens storlek gäller formeln:» eller »För påkänningens beräkning gäller spänningslagen:» återkomma ideligen.

Att göra boken till föremål för en detaljgranskning kan knappast komma ifråga. Man kan konstatera, att den såsom tryckt lärobok i mekanik och hållfasthetslära på lågstadiet är tämligen ensam i bokmarknaden och att den därför trots allt kan fylla en uppgift som ett hjälpmedel att bruka under en lärares ledning, men något värdefullt tillskott till den knapphändiga, elementära tekniska litteraturen är den knappast. *Elis Dahlin*

Charles Dull och Michael Idelson, *Elektricitetslärans grunder*. Natur och Kultur, Stockholm 1951, 320 s., 238 fig., kr. 19:50, inb. kr. 23:50.

Boken är skriven under andra världskriget på uppdrag av de amerikanska militärmyndigheterna närmast med tanke på blivande rekryter. Innehållet motsvarar realskolans och gymnasiets kurser men är väsentligt utförligare behandlat än i de svenska läroböckerna. Magnetism och elektrostatik t. ex. beskrives på 30 resp. 40 sidor med tillsammans 54 figurer. Varje moment är mycket skickligt pedagogiskt behandlat med en genomgående strävan att för läsaren tydligt och klart inte bara beskriva utan framförallt

förklara fenomenen i grunden. Självklart blir då denna lärobok idealisk för självstudier och som bredvidläsningsbok på såväl realskole- som gymnasiestadiet.

I de svenska gymnasieböckerna i ellära saknas helt text under figurerna. Här däremot finnes ofta i figur och anslutande text det väsentligaste koncentrerat. Utom att detta tillvägagångsätt är pedagogiskt riktigt, blir denna figurtext även värdefull vid en repetition.

Kursen exemplifieras med ett stort antal experiment, delvis intressanta nyheter. Ett ex.: verkan av varierande gallerspänning på anodströmmen åskådliggöres genom närmandet av en laddad lack- eller glasstång till gallret. Fyndigt!

I dessa kristider för skolväsendet, då i synnerhet i de naturvetenskapliga ämnena lärare med full kompetens i stor utsträckning saknas samt statsmakterna just i dagarna planerar en epa-utbildning i framförallt dessa ämnen — blir behovet av pedagogiskt skickligt skrivna samt utförliga läroböcker större än någonsin. Sådana läroböcker, till vilka den föreliggande absolut hör, skulle i någon mån kunna minska den standardsänkning i svenska folkets skolkunskaper, vi i dessa dagar uppleva.

Föreliggande bok är en intressant nyhet, som har sin självklara plats i varje fysiklärares bokhylla; den kan varmt rekommenderas till intresserade elever i realskolan och på gymnasiet.

Det höga priset hindrar att den skulle kunna tas som lärobok i våra skolor. Och dock måste en god lärobok, som skall fylla de pedagogiska kraven på utförlighet och rik illustration, bli dyr. Hur skulle det vara, om statsmakterna även skulle börja subventionera kulturella värden? *Edvin Ferner*

Linus Pauling, *Allmän kemi.* Svensk bearbetning av Gunnar Starck. Almqvist & Wiksells Akademiska Handböcker, Hugo Gebers Förlag, Stockholm 1952, 599 s., kr. 60:—.

Det är nu över fyra år sedan Paulings »General Chemistry» utkom i den amerikanska originalupplagan. Författarens djupa och allsidiga kunskaper, hans originalitet och hans livliga stil, vilken dock ej utesluter stor vederhäftighet, har gjort denna bok mycket uppskattad, ej endast i Förenta Staterna utan även i andra länder, där engelskspråkig litteratur läses. Haywards utomordentliga illustrationer har kanske även sin del i denna framgång.

I svensk akademisk undervisning har Paulings bok också fått en plats. I Uppsala är den för närvarande huvudläroboken i allmän och oorganisk kemi för betyget godkänd i kandidat- och ämbetsexamen. Vi har ansett att den ej bör undanhållas de elever som

läsa för högre betyg, varför den också satts som inledande lärobok i kursen för betyget med beröm godkänd. Studenterna har visat stor uppskattning av densamma och brukar ej minst framhålla dess förmåga att väcka intresse och ge nya synpunkter.

Givetvis kan man alltid finna orsaker till kritik mot en bok av den omfattning det här gäller. Med det framställningssätt Pauling valt är det nog ofrånkomligt, att behandlingen av ett visst element splittrats. En huvudframställning finnes alltid, men delar tages upp vid exemplifiering av allmänna fenomen och satser. Det mycket utförliga register som finnes i de senare trycken samt i den svenska bearbetningen (i originalupplagans första tryck var registret alltför kortfattat) undanröjer dock till största delen denna olägenhet.

Införandet av elektronegativitetsbegreppet kan diskuteras. Man får av boken lätt uppfattningen, att detta begrepp är säkrare teoretiskt grundat än vad som verkligen är fallet. Begreppet är ju utomordentligt värdefullt vid en grov, kvalitativ behandling men får därutöver användas med stor försiktighet. Att Pauling ej framhåller detta är kanske förklarligt; han är ju begreppets upphovsman.

I originalet saknar övningsexemplen svar, vilket är vanligt i amerikanska böcker. Hos oss önskar man svar åtminstone till räkneexempel, under det att lämpligheten av svar på rena frågor torde anses diskutabel. Just dessa problem har för övrigt i Paulings bok en synnerligen varierande svårighetsgrad. En del är mycket lätta, andra ligger utan tvekan över den nivå som kan nås enbart genom de fakta som boken meddelar. Det vore t. ex. roligt att veta hur många svenska kemister, som kan lämna det korrekta (eller åtminstone avsedda) svaret till problemet 30—9.

I lektor Nordefeldts anmälan av originalupplagan i Elementa, 32 (1949), s. 57, uttalades önskvärdheten av en svensk översättning av Paulings bok, och en sådan har glädjande nog blivit verklighet genom Gunnar Starcks insats. Man kan naturligtvis ifrågasätta nödvändigheten av en svensk upplaga av ett arbete, vilket väl bör kunna läsas på originalspråket av de allra flesta, som överhuvudtaget kan tillgodogöra sig innehållet. Men det främmande språket avskräcker nog ändå vissa läsare, och det är också mycket önskvärt att en svensk i början av sina studier får lära sig de svenska benämningarna, när de, som så ofta är fallet i t. ex. tekniska termer och trivialnamn, är helt olika de engelska. I detta fall tillkommer, att Starck ej har utfört en ordagrann översättning utan frikostigt gjort bearbetningar och tillägg, som i hög grad ökar bokens värde för en svensk läsekrets. Detta har givetvis kostat ett avsevärt arbete. I originalupplagan behandlas syra-basjämvikter enligt den klassiska metoden och Brönsteds definitioner återges i

ett fristående stycke tillika med G. N. Lewis' syra-basbegrepp. I den svenska bearbetningen sker däremot huvudframställningen enligt Brönsted. Svar på räkneexemplen hör även till tilläggen i den svenska upplagan.

I stort sett har Starck lyckats väl i sin tydliga strävan att till svenska överföra originalets lediga och trevliga stil. I vissa fall har dock originaltexten orsakat osvenska uttryck. Glädjande, och enligt min uppfattning efterföljansvärt i svenskt språkbruk, är att han, liksom amerikanarna, uppdelar elementen i metaller och ickemetaller, under det att metalloider är de element som bildar övergång mellan de båda huvudgrupperna. Ordet »bond» har Starck ofta återgivit med »band», vilket utan tvivel är ett lyckat ord. Införes det, bör det emellertid göras konsekvent. Ordets förekomst i intim blandning med »bindning» (se t. ex. kap. 9) gör ett mindre gott intryck.

Vid framställningen av fasregeln användes ordet »friheter» i stället för »frihetsgrad». Jag skulle ej ha haft något emot det förra uttrycket, om ej det senare fått hävd inom såväl matematik som fysik (det är f. ö. anmärkningsvärt att Pauling här använder »variance» i st. f. det vanliga »degree of freedom»).

De enligt min mening tämligen överflödiga termerna »monoprotic», »diprotic», »polyprotic» etc. översätts med »monoprotisk» etc. Härtill är att märka att Brönsted, som först införde denna terminologi, exempelvis sade, att svavelsyra och kolsyra är »diprota» (ej »diprotiska») syror. Den kortare termen förefaller bättre.

Sakfel, orsakade av bearbetningen, finns men förefaller ej vara många. Vid en genomläsning av avsnitten om järnets metallurgi, som för övrigt bildar en ganska svag del i originalet, fann jag martensit beskriven (s. 472) som en fast lösning i γ-järn. Originalet säger dock riktigt (åtminstone för detta stadium), att det rör sig om en lösning i α-järn. Originalets korrekta benämningar »hypoeutectoid» och »hyper-eutectoid» har felaktigt blivit »undereutektisk» resp. »övereutektisk» (den rätta benämningen eutektoidiskt stål har dock även kommit med). Perliten är bildad ur fast fas och kan därför ej benämnas eutektikum utan eutektoid. Järnkolsystemets eutektikum (ledeburit) ligger vid långt högre kolhalt.

De här gjorda anmärkningarna, som ju huvudsakligen är av formell art eller berör några få fel som närmast har skrivfelskaraktär, är ej avsedda att förringa värdet av den föreliggande bearbetningen. Kvar står att vi nu genom Starcks insats fått en modern, lättläst och inspirerande elementär lärobok i allmän kemi på svenska språket. På denna plats är det särskilt angeläget att

tillägga, att boken säkerligen är synnerligen lämpad som bredvidläsningsbok för gymnasiet. Man har stor anledning att vara bearbetaren tacksam för hans verk och önska boken all tänkbar framgång i dess nya gestalt.

Bokens pris gör dock att dess framtidsutsikter tyvärr ej te sig så ljusa som önskvärt vore. Den typografiska utstyrseln är utomordentlig, liksom kvalitén på papper och band, men jag kan ändå ej inse annat än att priset 60 kronor är ytterst förvånansvärt. Och har denna prissättning nödvändiggjorts av speciella orsaker, så undrar man, hur förlaget överhuvud vågat taga risken att trycka boken. Originalupplagan, som även har ett mycket tilltalande utförande, är dock tillgänglig i den svenska bokhandeln för ett pris av 23:80 kronor. *G. Hägg*

Henry B. Bull, *Physical Biochemistry.* 2nd ed. John Wiley & Sons Inc., New York 1951, 355 pp., $ 5.75.

Det finns sedan länge en rad mycket goda läroböcker i fysikalisk kemi, lämpliga för dem, som önska en allsidig orientering i ämnet. Prof. Bulls lärobok är skriven med hänsyn till studerande med främst biologisk eller medicinsk inriktning. Avsikten har varit att ge en lättillgänglig framställning av grundläggande fakta och en avvägning av lärostoffet till förmån för de områden, som äro av störst intresse för biologien och medicinen. Exemplen ha också valts med tanke på läsarens biokemiska inriktning.

Den nu föreliggande andra upplagan är till två tredjedelar nyskriven. Boken är illustrerad med belysande diagram och försedd med några problem efter varje kapitel. De flesta områdena av den fysikaliska kemien behandlas, om än stundom summariskt, medan några för biokemien viktiga områden behandlas relativt utförligt, t. ex. enzymkinetik, kalibrering av pH-skalan, ytaktivitet och högpolymera ämnens egenskaper. Det senaste decenniets forskningsresultat ha i stor utsträckning beaktats. Litteraturhänvisningarna och sakuppgifterna äro rikhaltiga, likaså de matematiska formlerna över fysikalisk-kemiska lagar, varför boken säkerligen har stort värde som uppslagsbok för den avsedda läsekretsen.

Den för en lärobok önskvärda konsekventa och noggranna genomarbetningen har emellertid icke tillräckligt medhunnits i denna upplaga. Definitioner och benämningar sakna ej sällan den klarhet och konsekvens, man har rätt att kräva av en lärobok. Åtskilliga sammanhang framkomma ej tydligt. Termodynamiska begrepp införas men utnyttjas endast delvis vid härledningar. Här-

ledningen av redoxpotential ur elektronkoncentrationerna i lösning och i metall finner anmälaren betänklig.

Det är onekligen en svår uppgift att åstadkomma en god, modern lärobok av här avsett slag. Författaren har nedlagt ett erkännansvärt arbete på att skriva en innehållsrik bok, som motsvarar det aktuella behovet. Även den, som är förtrogen med de vanliga läroböckerna i fysikalisk kemi, läser Bulls lärobok med behållning.

Eskil Hultin

Recensenter i detta häfte: fil. dr J. Andersson, Vaxholm; fil. lic. H. Atterling, Stockholm; lektor E. Dahlin, Stockholm; lektor F. Ehrnst, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; lektor E. Ferner, Karlstad; fil. lic. T. Ganelius, Stockholm; lektor B. Grundström, Djursholm; lektor T. Hall, Kalmar; docent S. Hilding, Stockholm; docent E. Hultin, Stockholm; civiling. G. Huss, Stockholm; prof. G. Hägg, Uppsala; docent E. Ingelstam, Stockholm; lektor T. Jönsson, Stockholm; docent H. Rådström, Sthlm; lektor K. Sjögren, Göteborg.

En vädjan om tålamod riktas till förläggare, författare, recensenter och läsare. Som framgår av förteckningen över insänd litteratur får Elementa mottaga ett stort antal böcker för anmälan. Glädjande nog är det ej svårt att finna recensenter, men de få beklagligtvis ofta vänta länge, innan de få se sina recensioner i tryck. Just nu har red. på sitt bord en ansenlig stapel nyinsända böcker och flera färdiga bokanmälningar, som vänta på publicering. Tyvärr kan f. n. ej större utrymme beredas recensionsavdelningen, varför dröjsmål bli oundvikliga. *Red.*

Gradualavhandlingar[1]

Inga Fischer, *Studies of the hydrogen bond and the ortho-effect*, Uppsala 1952. Disp. i Stockholm den 17 maj 1952. Opponenter: professor Egil Hylleraas, docent Bertil Jacobson och docent Stig Hjalmars.

För att kunna förstå hur olika sorters molekyler påverkar varandra måste man känna till molekylernas struktur. Man kan i regel bestämma molekylstrukturen i stora drag genom fysikaliska och kemiska experiment. Genom rent teoretiska beräkningar kan

[1] När ej annorlunda anges, är referatet av vederbörande förf:s egen hand.

man sedan komma fram till en mer detaljerad strukturkännedom. Vid dessa beräkningar utgår man från Schrödingerekvationen. Då de flesta molekyler består av ett stort antal partiklar, blir de kvantmekaniska räkningarna mycket komplicerade. Det är därför nödvändigt att göra förenklingar, om man över huvud taget skall kunna genomföra räkningarna.

Avhandlingen avser en strukturundersökning med både experimentella och teoretiska metoder. Det huvudsakliga målet är att bestämma hur den elektriska laddningen är fördelad inom molekylerna. Om laddningsfördelningen är osymmetrisk, har den positiva och den negativa laddningen olika centra. Detta innebär att molekylen har ett dipolmoment, som kan bestämmas experimentellt och beräknas teoretiskt.

Avhandlingen börjar med ett allmänt teoretiskt studium av de förenklingar av kvantmekaniken som vanligen används vid beräkningar av molekylstruktur. Jag har funnit att vissa förenklingar inte påverkar resultatet av beräkningarna väsentligt, då däremot andra förenklingar kan leda till en felaktig uppfattning om strukturen.

I fortsättningen av avhandlingen redogörs för ett par speciella strukturproblem. Det ena är en typ av attraktion, som förekommer mellan vissa molekyler och som fått namnet vätebrygga. Vätebryggorna är bl. a. av fundamental betydelse för strukturen av de livsviktiga äggvitemolekylerna. De är också ansvariga för vattnets välkända egenskaper, t. ex. dess fryspunkt och kokpunkt. I avhandlingen studeras experimentellt och teoretiskt vätebryggor mellan vattenmolekyler och andra enkla molekyler, i första hand etermolekyler. Det visas att det inte är eterns normala dipolmoment, som avgör om molekylen kan bilda en vätebrygga, utan att det betydelsefulla i stället är den ändring av dipolmomentet som förorsakas av vattenmolekylen.

Det andra problem, som tagits upp till behandling, är strukturen hos molekyler med orto-effekt, dvs. den inverkan på cykliska föreningars egenskaper som speciellt åstadkommes av substituenter i orto-ställning. Denna undersökning har utförts dels genom mätning av dipolmomenten för 18 olika anilinderivat, dels genom en teoretisk beräkning av dipolmomentet för anilin. Den teoretiska undersökningen har visat, att det finns minst två orsaker till orto-effekten. Den ena är att π-elektronerna inte kan röra sig inom hela molekylen utan bara inom en liten del av molekylen, när det finns orto-effekt. Detta medför en påtaglig ändring av energinivåerna. Den andra orsaken är den steriska repulsionen mellan olika delar av molekylen

Gunnar Lindström, *Nuclear resonance absorption applied to precise measurements of nuclear magnetic moments and the establishment of an absolute energy scale in β-spectroscopy.* Arkiv för Fysik, *4*, Nr 1, 1—80 (1951). Disputation i Stockholm den 7 december, 1951. Opponenter: docent Erik Ingelstam och professor Hilding Slätis.

Atomkärnornas magnetiska moment kan uppmätas med olika metoder, bland vilka de samtidigt föreslagna (1946) induktions- och resonansabsorptionsmetoderna inta en särställning. Dessa äro nämligen speciellt lämpliga för precisionsbestämningar.

Den senare metoden har använts vid de undersökningar som det här är fråga om. Första delen av avhandlingen ger en kort översikt av teorin och det experimentella arrangemanget.

Förhållandet mellan några olika kärnors (D^2, Li^7, F^{19}, Na^{23} och Al^{27}) magnetiska moment har uppmätts med en noggrannhet, som i vissa fall uppgår till $1:10^6$. Denna precision är möjlig beroende på att resonanslinjernas relativa halvvärdesbredd är $\approx 1:200\,000$. I vissa fall leder denna noggrannhet till att det uppmätta värdet blir beroende av den kemiska bindningen (t. ex. H och F^{19}).

Den magnetiska resonansabsorptionsmetoden har också använts för bestämning av magnetfält. Den relativa noggrannheten blir i detta fall mycket stor (bättre än $1:10^6$) under det att den absoluta noggrannheten blir av storleksordningen $1:40\,000$, dvs. väsentligt bättre än vad som erhålles med klassiska metoder.

Ett antal inre konversionslinjer från thoriums sönderfall har uppmätts, och de erhållna resultaten visar t. ex. tillsammans med Hedgrans och Linds mätningar (Arkiv för Fysik *5*, nr 13) att elektronens och positronens massa är lika samt att tidigare använda referenslinjer var felaktiga.

Tidskrifter

Tellus, Svenska Geofysiska Föreningen, Stockholm 1952: 1—2.

Ur innehållet: Fluctuations de la rotation du Globe terrestre; Prognostic Value of Barotropic Models; On the Content of Nitrogen in Atmospheric Precipitation; Distribution of Temperature and Wind at High Altitude; Ionization due to Radioactive Substances in the Ground; Flow of Mercury in Presence of a Magnetic Field; Advances in the Study of Convective Clouds; Les ondes atmosphériques.

Ljuskultur, Stockholm 1952: 1—2.

Ur innehållet: Ett läroverk (Jönköpings hal) i ny belysning; Bländning, ljus, skugga; Dubbelaktiverade lysämnen för lysrör; Luftdesinfektion med ultravioletstrålning; Lysrörens färgton, färgtemperatur och färgåtergivning; Teknisk-ökonomiske lysproblemer i industrien.

Populär radio, Stockholm 1952: 6—9.

Ur innehållet: Germaniumdiodens användningsområden; Mätbrygga för motstånd och kondensatorer; Avstörning av bilradiomottagare; Nya kortvågsstationen för rundradio i Hörby; Televisionsmottagaren, hur den beräknas och konstrueras, VIII—X. Ett stort antal mindre artiklar och notiser.

Fysisk Tidsskrift, København 1952: 1—2.

Ur innehållet: Julius Hartmann, 11.11.1881—6.11.1951; C. F. Powell, Nobelpristager i Fysik for 1950; IUPAP (= *I*nternationel *U*nion of *P*ure and *A*pplied *P*hysics) møde i København juli 1951. Danske eksamensopgaver. Nogle skoleforsøg. Bokanmälningar.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1952: 1—2.

Ur innehållet: Extensions of some theorems of Schmidt and McKinsey; Über die eindeutige Primelementzerlegung; Kontinuitet og diskrete funksjoner; Funksjoner som fremstiller primtal; Anvendelse av 3-adisk analyse og »bikropper» til bevis for noen satser angående visse kubiske ubestimte ligninger. Oppgaver for gymnaselever; oppgaver til løsning.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1952: Mai, august.

Ur innehållet: K. A. Wingårdh, 5.8.1892—5.1.1952; Nobelprisen i fysikk 1951: J. D. Cockcroft, E. T. S. Walton; Om de nyeste teorierne for opprinnelsen til den kosmiske strålingen; Vekselstrømforsøk ved frekvens 500; Uran-reaktorn, atomenergien og bombene; J. L. Gay-Lussac; Naturvitenskap og Humanisme; Norges Standardiserings-Forbund: Forslag til standarder vedrørende et praktisk målesystem bygget på metersystemet.

Naturen, Bergen 1952: 5—8.

Ur innehållet: En av kjernekjemiens triumfer: de syntetiske elementer; Mikroorganismens genetikk; Hval i akvarium; Problemet kunstig regn; Vitenskapen og livet. Bokanmälningar.

Discovery, London 1952: June, July, August, September.

Ur innehållet: Electric Eels; The Search for New Antibiotics; Progress in Air Archaeology; Samuel Pepys, 1633—1703; The Battle Against Trypanosomes; From Woad to Indigo; The Story of Baird and Television; Science in the Schools; Careers in Physics; Vermiculite, A Versatile Mineral; Geology and Building Materials; The Etical Dilemma of Science; Underwater Television. Ett stort antal notiser under rubriken »Progress of Science». Bokanmälningar.

Science Progress, London 1952: July.

Ur innehållet: Synthetic Soil Conditioners and Soil Structure; Oceanographic Exploration, 1851—1951; The Principles and Practice of Air Separation; The Soil Fungi as a Microcosm for Ecologists. Recent Advances in Science: Astronomy, Physics, Meteorology, Organic Chemistry, Geology, Botany, Zoology, Physical Antropology. Ett stort antal bokanmälningar.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

1821) *Visa, att kurvan* $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ *har ett centrum, om två av dess dubbeltangenter äro parallella.* *X.*

1822) *Hörnen A, B och C i en given triangel tagas till centra i tre cirklar, vilkas radier äro proportionella mot resp. höjder* h_a, h_b *och* h_c. *Sök orten för cirklarnas radikalcentrum.* *X.*

1823) *Konstruera de spetsiga vinklar, som satisfiera ekvationen* $\sin x+\cos x=n \sin x \cos x$. *Angiv möjlighetsvillkoret.*

S. B.

Enklare matematiska uppgifter[2]

1824) Från en punkt P utanför en cirkel dragas två sekanter, PAB och PA_1B_1. Punkterna A, B, A_1, B_1 ligga på cirkeln. Bestäm förhållandet mellan sträckorna AA_1 och BB_1, om $PA:AB=1:n$ och $PA_1:A_1B_1=n:1$.

Svar: $\sqrt{n}:(n+1)$.

1825) En vid A rätvinklig triangel ABC med ytan y är inskriven i en cirkel med radien R. Tangenterna i A, B och C skära varandra i D och E, varvid fyrhörningen $BDEC$ med ytan Y uppkommer. Visa, att $yY=2R^4$.

1826) Från origo äro dragna tre linjer l_1, l_2 och l_3 med vinkelkoefficienterna 1, 2 och $-5{,}5$ resp. Visa, att den spetsiga vinkeln mellan l_2 och l_3 är dubbelt så stor som den spetsiga vinkeln mellan l_1 och l_2.

1827) Lös ekv. $\sin x:(\cos x+\operatorname{tg} x)=\cot x$.

Svar: $90°+n\cdot 120°$, $270°+n\cdot 360°$.

1828) Tre godtyckliga vinklar x, y och z äro givna. Man bildar den cykliska produkten $\Pi[\cos(3y+z)+2\sin y \sin z]$, som består av

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérg. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 1824—1827 äro insända av *B. Svenonius*, 1828—1829 av *X*, 1830—1832 av *P.-G. Ljungfors*, 1833 av *I. Gunsjö*.

den utskrivna faktorn och de två, som fås ur denna genom cyklisk permutation av x, y, och z. Visa, att produkten är symmetrisk. Visa motsvarande för $\Pi[\cos(3y+z)+2\cos y\cos z]$.

Svar: Den första kan skrivas $\Pi\cos(y+z)(2\cos 2y-1)$ och den senare $\Pi\cos(y+z)(2\cos 2y+1)$.

1829) En rektangel är inskriven i cirkeln C_1. Cirkeln C_2, koncentrisk med C_1, skär rektangelsidorna i två punkter vardera. När dessa förenas två och två med linjer parallella med rektangelns sidor, bilda föreningslinjerna en ny rektangel, vars omskrivna cirkel är C_3. Visa, att cirkelringarna mellan C_1 och C_2 och mellan C_2 och C_3 äro likytiga.

1830) Mellan variablerna x, y och v gälla sambanden $x=\sin v+\cos v$, $y=\sin^3 v+\cos^3 v$. Uttryck y som funktion av x och upprita kurvan för de värden på x, som äro möjliga.

Svar: $2y=3x-x^3$; $-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2}$.

1831) Den ena parametern i en hyperbel är parameter i en parabel, vars vertex ligger i hyperbelns medelpunkt. Beräkna vinkeln mellan kurvorna.

Svar: $22{,}5°$.

1832) I parabeln $y^2=4ax$ dragas två mot varandra vinkelräta kordor genom parabelns brännpunkt. Angiv det minsta möjliga avståndet mellan dessa kordors mittpunkter.

Svar: $4a$. — Om kordornas mittpunkter äro M_1 och M_2, F är fokus samt N_1, N_2, S resp. projektioner på styrlinjen, så är $M_1M_2\geqq N_1N_2\geqq 2FS=4a$.

1833) Genom ekv. $\sin xy=ax$, där a är en konstant, definieras y som funktion av x. Beräkna värdet av $x^2+(y+xy')^{-2}$.

Svar: $1:a^2$.

Lösn. till uppg. 1793—1795

1793) *I en cirkel med centrum O och radien R är inskriven en spetsvinklig triangel ABC, vars höjder råkas i H. Bestäm maximum och minimum för summan av PO och PH, när punkten P genomlöper triangelns omkrets.* *X.*

Om höjden från A råkar den omskrivna cirkeln (O) i A_1, är $\sphericalangle HBC=\sphericalangle HAC=\sphericalangle A_1BC$, varför A_1 (på ytterbågen BC) är H:s spegelbild i BC; p. s. s. B_1 och C_1. Ligger P t. ex. på BC, är därför $s=PO+PH=PO+PA_1$. Alltså har s minima $=R$, när P passerar

radierna OA_1, OB_1, OC_1, och maxima, när P ligger i A, B, C. Spec. absolut max. inträffar i det (ev. de) hörn, som står mot den minsta sidan (resp. sidorna i en likbent, icke liksidig triangel ABC).

S. B.

1794) *Två klot, vilkas radier äro en längdenhet, tangera varandra. A_i och B_i betyda punkter på resp. ytor. A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_3, ..., $B_n A_{n+1}$ äro gemensamma tangenter. Beräkna deras längd, då A_{n+1} sammanfaller med A_1, utan att detta inträffat tidigare; $n=3, 4 \ldots$*

X.

Om A_1, A_2 ... ligga på en cirkel med centrum O och radien r, M är centrum för det ena klotet, P_1 projektionen av B_1 på cirkeln O, $A_1B_1=x$ samt $MO=y$, så är $\sphericalangle A_1OP_1=2\alpha=\pi:n$, $\sphericalangle MA_1B_1=\frac{1}{2}\pi$, $A_1P_1=2r\sin\alpha$. Av $r^2+y^2=1$, $x^2+1=(2-y)^2+r^2$, $x^2=(2-2y)^2+4r^2\sin^2\alpha$ fås $x^2=4-4y=4-4\operatorname{tg}^2\alpha=4\cos 2\alpha:\cos^2\alpha$, $x=2\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}:\cos\frac{\pi}{2n}}$. För $n\to\infty$ fås $x=2$, som sig bör.

S. B.

1795) *Om motstående sidoytor i en oktaeder äro parvis parallella, så äro de parvis kongruenta och diagonalerna dela varandra mitt itu. Betecknar T arean av en sidoyta och P arean av ett snitt genom två diagonaler, så är $2\Sigma T^2=\Sigma P^2$.*

N. J.

Om man med oktaeder förstår den kropp, som uppkommer, när man av en given tetraeder P_4 bortskär topptetraedrar, så att av varje sidotriangel i P_4 återstår en i strikt mening inskriven triangel, så måste dessa i förevarande fall ha sina hörn i mittpunkterna av P_4:s kantlinjer. Oktaederns kantlinjer kunna då uppdelas på tre parallellogrammer med gemensamt centrum i O. Deras diagonaler äro identiska med oktaederns, av vilka var och en fungerar i två parallellogrammer. — Betrakta tetraedern $OABC$, där oktaederfacetten har ytan T_1 och trianglarna BCO, CAO, ABO resp. ytorna u, v, w. Inför vektorerna $\vec{T}_1$, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, som äro vinkelräta mot resp. ytor och till sitt absoluta belopp lika med var sin yta. T_1 kan antagas riktad in i oktaedern, $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ut ur tetraedern. Då är $\vec{T}_1=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, emedan vid projektion på ett godtyckligt plan proj. av ABC är (med tecken taget) summan av de övriga tetraederfacetternas projektioner. De återstående $\vec{T}$ fås genom teckenändringar hos $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Alltså är vid skalär multiplikation: $2\Sigma T^2=2\Sigma\vec{T}\cdot\vec{T}=2\Sigma(\pm\vec{u}\pm\vec{v}\pm\vec{w})^2=16\Sigma u^2=\Sigma P^2$, ty produkterna $\pm 2\vec{u}\cdot\vec{v}$ etc. taga ut varandra.

X.

Resultat av pristävlan 1951.

I tidskriftens decemberhäfte 1951 inbjödos elever vid allmänna läroverk, tekniska läroverk och gymnasier och med dessa jämnställda enskilda läroanstalter till en pristävlan. Det gällde att lösa minst tre av fem matematiska uppgifter.

Vid granskning av de inkomna tävlingsskrifterna har det visat sig, att ingen av de tävlande klart når upp till den angivna minimifordran. Första priset utdelas därför ej.

Andra pris, ett presentkort å 100 kronor, skänkt av AB Henrik Lindståhls bokhandel i Stockholm, tilldelas Ingemo Andersson, Göteborgs gymnasium f. flickor, och tredje pris, årg. 29—34 av Elementa, Ingemar Lind, Högre allm. lärov. i Kalmar. Ett extrapris dessutom till Agnes Henschen, Högre allm. lärov. f. flickor å Norrmalm i Stockholm. Pristagarna äro födda resp. 1932, 1934, 1935 och ha samtliga avlagt studentexamen vid nämnda läroverk våren 1952.

Utom tävlan har fil. dr Nils Juringius (N. J.) insänt förträffliga lösningar till samtliga uppgifter. Med tanke på den ungdomliga läsekrets tävlingen gällde har red. tillåtit sig vissa förtydliganden i dennes lösningar, även om något av deras karakteristiska pregnans därigenom gått förlorad. — Problemförfattaren (X) och A. W. ha även haft vänligheten meddela lösningar.

1. Parablerna I och II ha samma diameterriktning. Diametern d skär I i D_1 och II i D_2; diametern e skär I i E_1 och II i E_2. Tangenterna i D_1 och D_2 råkas i F och tangenterna i E_1 och E_2 i G. Formulera villkoret för att FG är en diameter.

Om man i lydelsen inlägger, att med olika bokstäver betecknade element: I och II, d och e, F och G, äro bestämda och åtskilda i varje par, kan uppgiften lösas som följer.

Om ekv. för I, II och d äro resp. $y^2=Px$, $y^2=Qx+ry+s$ och $y=\delta$, blir D_1:s x-koord.$=\delta^2:P$. Ekv. för tangenten i D_1 blir då $2y\delta=P(x+\delta^2:P)$ eller $2y\delta=Px+\delta^2$. Ekv. för tangenten i D_2 blir på samma sätt $2y\delta=Qx+ry+s+\delta^2$. Genom subtraktion fås $(P-Q)x=ry+s$ (ekv. k). Då man av I och II också får ekv. k, inses att k är parablernas gemensamma korda, på vilken alltså F och G ligga. När $P=Q$, $r\neq 0$, är k en diameter och en av de gemensamma punkterna ersatt med diameterriktningen. Om $P=Q$ och $r=0$, saknas k. Villkoren $P=Q$, $r\neq 0$ innebära, *att II erhålles genom en parallellförflyttning av I i annan riktning än diametrarnas.*

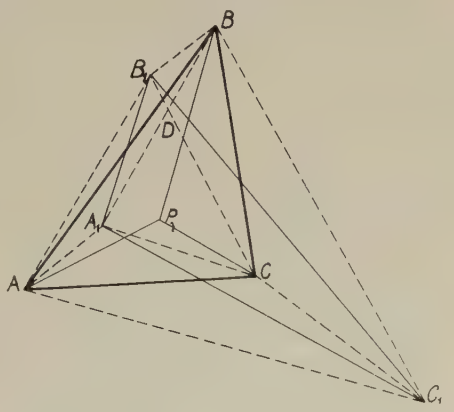
Valet av d och e är sedan likgiltigt, så länge F och G ej sammanfalla. *X.*

2. ABC är en triangel med ytan T. En punkt P, som ej ligger på någon av triangelsidorna eller deras förlängningar, förenas med hörnen. A_1, B_1, C_1 äro höjdernas skärningspunkter i trianglarna PBC, PCA, PAB. Beräkna ytan av triangeln $A_1B_1C_1$.

a. I en triangel ABC är avståndet från hörnet A till höjdernas skärningspunkt $= |a \cot A|$. Sätta vi $\sphericalangle BPC = \alpha$, $CPA = \beta$, $APB = \gamma$, är $PA_1 = |a \cot \alpha|$, $PB_1 = |b \cot \beta|$. Vi antaga P vara belägen inom triangeln ABC och α, β, γ trubbiga. Då $\sphericalangle A_1PB_1 = 180° - C$, blir ytan av triangeln $A_1PB_1 = \frac{1}{2}ab \sin C \cot \alpha \cot \beta = T \cot \alpha \cot \beta$ och ytan av den sökta triangeln $A_1B_1C_1 = T \cdot \Sigma \cot \alpha \cot \beta = T \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma \cdot \cdot \Sigma \operatorname{tg} \alpha = T$, ty $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$, om $\alpha + \beta + \gamma = k \cdot 180°$. *Den sökta triangeln har alltså samma yta som den givna.* — Man kan visa, att resultatet är allmängiltigt. *N. J.*

b. Uppgiften kan lösas geometriskt på följande sätt.

Emedan AB_1 och A_1B äro höjder mot sidan PC i trianglarna PAC och PBC, är $AB_1 \parallel A_1B$. Av liknande skäl är $AC_1 \parallel A_1C$ och $BC_1 \parallel B_1C$.



$$\begin{aligned}
\therefore\ & \triangle AA_1B = \triangle A_1BB_1 \\
& \triangle AA_1C = \triangle CC_1A_1 \\
& \triangle BB_1C = \triangle CC_1B_1 \\
-& \triangle BB_1D = -\triangle BB_1D \\
& \triangle A_1CD = \triangle A_1CD \\
\hline
& \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1
\end{aligned}$$

I beviset förutsättes, att en av höjdernas skärningspunkter ligger inom $\triangle ABC$. I andra fall får man byta tecken för några av de fem likheter, som adderas. *A. W.*

3. En cirkel (K) och två icke diametralt motsatta punkter A och B på denna äro givna. Man betraktar de liksidiga hyperbler, som gå genom A och B samt tangera K i en variabel punkt C. Sök orten för centrum i en sådan hyperbel. Vilken är hyperblernas fullständiga envelopp?

Antag, att $x^2+y^2=1$ är ekv. för cirkeln, $x=a$ ekv. för AB och $x\cos v+y\sin v=1$ ekv. för tangenten i C. För att erhålla hyperbelns ekvation använder man satsen: Om $U_1=0$ och $U_2=0$ äro ekvationerna för två andragradskurvor, är $U=U_1-mU_2=0$ ekv. för en andragradskurva, som går genom de förras skärningspunkter, och om dessa tangera varandra i en punkt (två sammanfallande skärningspunkter!), tangeras de även av U-kurvan i denna punkt. Hyperbelns ekv. kan därför skrivas

$$x^2+y^2-1-m(x-a)(x\cos v+y\sin v-1)=0$$

Om koordinatsystemet vrides, förblir summan av koefficienterna för x^2- och y^2-termerna oförändrad. För en liksidig hyperbel är denna summa$=0$. Man får alltså $1-m\cos v+1=0$, dvs. $m=2:\cos v$. Hyperbelns ekv. blir således

$$\cos v(x^2+y^2-1)-2(x-a)(x\cos v+y\sin v-1)=0 \quad (1).$$

Medelpunktens koordinater satisfiera ekv. $U'_x=0$ och $U'_y=0$, vilket lätt inses, om man tänker sig ekv. skriven

$$U=A(x-a)^2+B(y-b)^2+C(x-a)(y-b)+F=0.$$

Medelpunkten bestämmes således av systemet

$$(x-a)\cos v+y\sin v=1; \quad (x-a)\sin v-y\cos v=0.$$

Orten erhålles genom elimination av v. Kvadrering och addition ger $(x-a)^2+y^2=1$, som är orten för centrum.

Enveloppen erhålles genom elimination av v ur ekv. (1) och den genom derivering med avseende på v erhållna ekv.

$$-\sin v(x^2+y^2-1)=2(x-a)(-x\sin v+y\cos v) \quad (2).$$

Multipliceras (1) med $\cos v$ och (2) med $-\sin v$, erhålles efter addition $x^2+y^2-1-2x(x-a)=-2(x-a)\cos v$ (I). Multipliceras (1) med $\sin v$ och (2) med $\cos v$, fås efter addition $y=\sin v$ (II); I och II ge till sist $[x^2+y^2-1-2x(x-a)]^2=4(x-a)^2(1-y^2)$ eller $(x^2+y^2-1)[x^2+y^2-1-4x(x-a)+4(x-a)^2]=0$. Enveloppen består av cirklarna $x^2+y^2-1=0$ och $(x-2a)^2+y^2-1=0$. *X.*

Samme förf. har även givit en elegant geometrisk lösning.

4. x och y äro två olika stora positiva rationella tal, som satisfiera $x^y=y^x$. Angiv den allmänna formeln för dessa tal och undersök när de äro hela tal.

Till följd av symmetrin kan man antaga $y>x$ och sätta $y=px:q$, där p och q äro positiva relativa primtal och $p-q\geqq 1$. Ekvationen ger då $(px:q)^x=x^{px:q}$; $px:q=x^{p:q}$, $x=(p:q)^{q:(p-q)}$, $y=(p:q)^{p:(p-q)}$. Sättes $p-q=1$, fås $x=(\overline{q+1}:q)^q$ och $y=(\overline{q+1}:q)^{q+1}$, $q=1,2,3\ldots$ eller tvärt om. Det bör dock visas, att detta är den enda möjligheten. Då p, q, $p-q$ äro rel. primtal två och två, måste

p och q vara jämna $(p-q)$:te heltalsdigniteter för att x och y skola bli rationella, ifall $p-q>1$. Alltså fås $p=\alpha^{p-q}$, $q=\beta^{p-q}$ där α och β äro pos., rel. primtal och $\alpha>\beta$. Då är $p-q=(\alpha-\beta)(\alpha^{p-q-1}+\ldots+\beta^{p-q-1})$, om $p-q>1$ med $p-q=\alpha-\beta$, då $p-q=1$. I första fallet skulle högra ledets senare parentes innehålla $p-q$ termer, av vilka ingen är <1, men den första termen säkert >1. Detta är omöjligt. Alltså är $p=q+1$. Enda heltalslösningar äro för $q=1$, $x=2$, $y=4$ eller omvänt. *N. J.*

5. I en i allmänhet snett avskuren toppkon av en rotationskon är mantelytan M, basytan E; ytan av det snitt, som delar konen i två symmetriska hälfter är T. Visa att det finnes ett av konens form och storlek oberoende samband mellan M, E och T.

Konens volym är V, höjden h; a, b, c ha sina vanliga betydelser i basellipsen med storaxeln AA_1 och brännpunkterna F och F_1. Det inskrivna och det vid basytan vidskrivna klotet ha medelpunkterna I och I_1 och radierna r och r_1; de tangera denna i F och F_1 resp. Ur de likformiga trianglarna AIF och AI_1F_1 följer $rr_1=AF$. $AF_1=(a+c)(a-c)=b^2$. Enl. en känd sats är $V=\frac{1}{3}r(M+E)$ och $V=\frac{1}{3}r_1(M-E)$, varav genom multiplikation $M^2-E^2=9V^2:b^2=\pi^2a^2b^2h^2:b^2=\pi^2T^2$. *N. J.*

Volymen av en tetraeder

I uppg. 8, allmän kurs (fyllnadsprövning aug.—sept. 1952, se detta häfte, s. 225) gäller det att beräkna volymen av en tetraeder med givna kantlinjer. Avsikten med denna notis är att rikta uppmärksamheten på att man vid behandlingen av denna och en del andra stereometriska uppgifter lämpligen gör en utbredning av begränsningsytorna i ett plan, varefter uppgiften behandlas planimetriskt. Detta förfaringssätt, så välbekant från projektionsritningen (ingår som moment i gymnasiets teckningsundervisning) synes vara alltför litet beaktad vid matematikundervisningen. Detta är förklarligt, då beskrivande geometri ej ingår i matematiklärarnas utbildning här i landet.

Ett första steg till att reparera denna brist är att matematikläraren söker kontakt med teckningsläraren och tar del av vad eleverna få lära i projektionsritning. Han skall då finna, att stereometriundervisningen kan få god hjälp av projektionsritningen. Och låter han eleverna vid matematikskrivningar få en eller annan uppgift, som får behandlas grafiskt medelst projektionsritning, stimuleras de till ökat intresse för ritning, och teck-

ningsläraren får ett gott handtag. Personligen har jag en mycket god erfarenhet av ett dylikt samarbete mellan matematik- och teckningslärare.

Sidoytorna i tetraedern $O(ABC)$ vikas ned i basytans plan kring resp. baskanter, varvid sidoytan ABO kommer att få läget ABC_1, osv. så som fig. 1 visar. Höjderna A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 mötas förlängda i en punkt P, som är O:s projektion på basplanet. Äro tetraederns alla kantlinjer givna, kunna samtliga sträckor i figuren direkt bestämmas *grafiskt*.

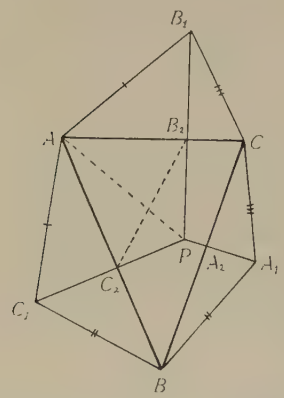


Fig. 1. Oregelbunden tetraeder.

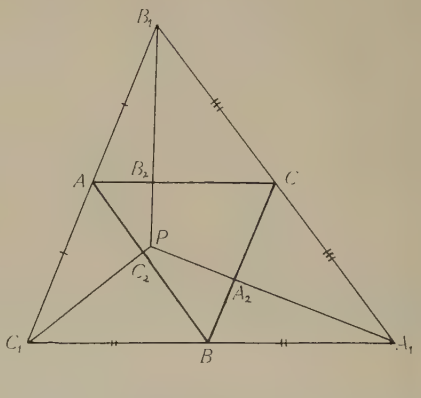


Fig. 2. Tetraeder med kongruenta ytor. Sidoytorna nedvikta i basytans plan.

Ur den rätvinkliga triangeln APO beräknas eller konstrueras t. ex. den vinkel som AO bildar med basplanet samt tetraederhöjden OP, varefter tetraederns volym erhålles. Ur den rätvinkliga triangeln A_2PO kan man få vinkeln mellan sidoytan BCO och basplanet samt även nyssnämnda tetraederhöjd.

Principiellt ligger saken således enkelt till, och grafisk behandling leder snabbt till resultat. Planimetrisk beräkning av vederbörande sträckor blir emellertid i detta allmänna fall rätt mödosam. För beräkning av AP och därmed av höjd och volym kan man gå tillväga på följande sätt.

AP är diameter i den kring fyrhörningen AB_2PC_2 omskrivna cirkeln, dvs. (enl. sinusteorem.) $AP = C_2B_2 : \sin A$; C_2B_2 erhålles med hjälp av cosinusteoremet ur $\triangle AB_2C_2$.

Om — såsom i uppg. 8 — alla begränsningsytorna äro kongruenta, bli räkningarna enkla, och man finner lätt det kända uttrycket för tetraederns volym $= \frac{1}{3}abc\sqrt{\cos A \cos B \cos C}$.

Vid utbredning av sidoytorna i basplanet erhålles i detta fall en triangel $A_1B_1C_1$ med sidorna $2a$, $2b$, $2c$ (se fig. 2). I varje triangel är avståndet från ett hörn (A) till höjdernas skärningspunkt $=2R\cos A$, där R är radien i den kring $\triangle ABC$ omskrivna cirkeln. I fig. 2 är alltså $A_1P=4R\cdot\cos A$, dvs. $A_2P=4R\cos A-h_a$. För tetraederhöjden $OP=H$ erhålles då $H^2=h_a^2-(4R\cos A-h_a)^2=$ $=4R\cos A(2h_a-4R\cos A)=16R^2\cos A(\sin B\sin C-\cos A)=$ $=16R^2\cos A\cdot\cos B\cos C$. Man får då volymen $=\frac{1}{3}T\cdot H=$ $=\frac{1}{3}abc\sqrt{\cos A\cos B\cos C}$.

C. E. Blom

Fyllnadsprövning efter studentexamen

Augusti—september 1952

Matematiska uppgifter för latinlinjen[1]

1. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen lika med det inverterade värdet av kvoten. Seriens summa är $-1\frac{1}{8}$. Vilken är serien?
2. Ytan av en rektangel, i vilken två sidor förhålla sig som 1 : 2, delas i tre lika stora delar genom två räta linjer från ett av rektangelns hörn. Bestäm vinkeln mellan dessa båda linjer.
3. Lös ekvationen $\dfrac{x-2}{x+x^3}+\dfrac{2}{6+x-x^2}-\dfrac{1}{3x-x^2}=0$.
4. I en triangel ABC äro sidorna $AB=39$ cm, $AC=42$ cm och $BC=45$ cm. Genom medelpunkten till den i triangeln inskrivna cirkeln drages en transversal parallellt med sidan AC. Beräkna sidorna i den av transversalen avskurna topptriangeln.
5. Kateterna i en rätvinklig triangel äro 7 cm och 24 cm. En cirkel uppritas med medianen mot hypotenusan som diameter. Beräkna längden av den korda, som cirkeln avskär av hypotenusan.
6. I triangeln ABC är vinkeln A 20°. Mittpunktsnormalen till sidan BC råkar sidan AB i en punkt D, så belägen att $AD:DB=3:2$. Bestäm vinklarna B och C i de båda fall, som äro möjliga.
7. En kvadrat och en regelbunden sexhörning äro inskrivna i samma cirkel, så att två av deras hörn sammanfalla. Bestäm det exakta förhållandet i förenklad form mellan ytan av en av de trianglar, som sexhörningens sidor avskära av kvadraten,

[1] Uppg. i matematik för allmänna linjen vid Uppsala enskilda läroverk utgjordes av latinlinjens nr 2—5 och 7 samt reallinjens (allm. kurs) nr 3—5.

och ytan av en av de trianglar, som kvadratens sidor avskära av sexhörningen.

8. I triangeln ABC är vinkeln A rät, vinkeln C 30° och sidan AB 8 längdenheter. Två punkter börja samtidigt röra sig, den ena från A till B med en hastighet av en längdenhet per sekund och den andra från B till C med dubbelt så stor hastighet. Beräkna med en decimal de båda punkternas inbördes avstånd efter 1 sek, 2 sek, ..., 8 sek. Åskådliggör med ett diagram, hur detta avstånd beror av tiden (1 längdenhet=1 cm, 1 sek=1 cm), och bestäm medelst diagrammet eller på annat sätt det kortaste avståndet mellan punkterna.

Resultat: **1.** -2, 1, $-0{,}5$ osv. **2.** $18{,}43°$. **3.** $x_1=2$, $x_2=-7$. — Sammanslå vänstra ledets två sista termer. **4.** 26 cm, 28 cm, 30 cm. — Längdskalan är $(h-r):h=(12-4):12=2:3$. **5.** $10{,}54$ cm. **6.** B och C äro resp. $64{,}57°$ och $95{,}43°$ eller $5{,}43°$ och $154{,}57°$. (Drag CD). **7.** $(9-5\sqrt{3}):3$. **8.** Efter x sek är avståndet $y=\sqrt{7x^2-32x+64}=$ $=\sqrt{7(x-\frac{16}{7})^2+\frac{192}{7}}$ längdenheter; $y_{\min.}=\sqrt{192:7}=8\sqrt{21}:7\approx 5{,}2$ l.e. efter $2\frac{2}{7}$ sek.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Allmän kurs

1. Lös ekvationen $\cos(3x+180°)+\sin(270°+x)=0$.
2. I en likbent triangel är basen 5 cm och omkretsen 18 cm. Finns det någon annan likbent triangel med samma omkrets och samma yta som den nämnda, och hur stor är i så fall basen i denna triangel?
3. Två på varandra följande hörn i en romb äro belägna i punkterna (2; 5) och (13; 8). Diagonalernas skärningspunkt ligger på den räta linjen $5x+y-57=0$. Ange koordinaterna för rombens övriga hörn i de båda fall, som äro möjliga.
4. Två normaler till kurvan $2y=x^2+2x+4$ bilda tillsammans med x-axeln en likbent triangel med basen längs x-axeln och tyngdpunkten i kurvans minimipunkt. Bestäm ekvationerna för dessa normaler.
5. Ur de båda serierna 1, 8, 15, 22, ... och 43,5; 41,5; 39,5; 37,5; ... skall man i ordning från seriernas början taga ett antal termer, så att summan av alla dessa termer, tillsammans 12 stycken, blir så liten som möjligt. Hur många termer böra tagas ur vardera serien, och hur stor blir den erhållna summan?
6. Genom den radie, som är vinkelrät mot ett halvklots plana yta, läggas tre plan, så att halvklotet delas i sex lika delar. I en

av dessa delar inskrives en rät cirkulär cylinder, så att dess mantelyta tangerar de båda plan, som innehålla den nämnda radien, medan dess ena basyta ligger i halvklotets plana yta och den andra basytans omkrets tangerar den sfäriska ytan. Bestäm förhållandet mellan volymerna av den inskrivna cylindern och ifrågavarande del av halvklotet, när cylinderns volym är så stor som möjligt.

7. Från hörnet A i triangeln ABC dragas två räta linjer, som dela vinkeln A i tre lika stora delar och sidan BC i förhållandet $3:4:10$. Beräkna triangelns vinklar.
8. En tetraeders begränsningsytor utgöras av kongruenta trianglar med sidorna 13 cm, 14 cm och 15 cm. Bestäm tetraederns volym.

Resultat: **1.** $90°+n\cdot 180°$; $45°+n\cdot 90$. **2.** Ja, med basen $(2+\sqrt{24})=$ $=6{,}899$ cm. **3.** (16; 19) och (5; 16) eller (20; −1) och (9; −4). **4.** $x-2y+10=0$ och $x+2y-8=0$. **5.** Ur den första fem, ur den senare sju termer; summan är 337,5. **6.** $2\sqrt{3}:9$. — Inskriv i halvklotet en cylinder (C) med samma höjd som den enl. uppgiften inskrivna (c). Då c:s basradie är $\frac{1}{3}$ av C:s, är c:s volym $\frac{1}{9}$ av C:s, vilket även gäller max. vol. Den största i ett klot inskrivna cylindern upptar $1:\sqrt{3}$ av klotets volym, osv. **7.** $A=76{,}05°$, $B=81{,}43°$, $C=22{,}52°$. — Om BC:s delar i ordning äro $BD=3$, $DE=4$, $EC=10$, sätta vi $AB=3x$, $AE=4x$, $AD=4y$, $AC=10y$. Den andra bissektrissatsen ger då ett ekv.system, varur erhålles $x=\sqrt{5}$, $y=\sqrt{3}$. Sedan fås $\cos A=14:15\sqrt{15}$ osv. **8.** $42\sqrt{55}=311{,}5$ cm³. — Nedvikas tre av begränsningsytorna i den fjärde ytans plan, får man en triangel, i vilken höjdernas skärningspunkt är fotpunkten för tetraederhöjden mot denna yta. Se närmare sid. 221 i detta häfte. Om likytiga tetraedrar se även en uppsats i Elementa, årg. 7, sid. 76 och om volymberäkning av en dylik, F. Carlson, Geometri I, uppg. 171.

Matematiska uppgifter för reallinjen

Specialkurs

1. En cirkelsektor med given radie och trubbig medelpunktsvinkel roterar kring en av sina begränsningsradier. För vilken medelpunktsvinkel får den därvid alstrade rotationskroppen så stor yta som möjligt?
2. Avstånden från punkterna (−3; 3), (2; 6) och (4; −2) till en viss rät linje förhålla sig som $1:2:3$. De båda sist nämnda punkterna ligga på samma sida om linjen, den först nämnda på motsatt sida. Bestäm ekvationen för denna linje.

3. En parabel har y-axeln till styrlinje, och dess brännpunkt ligger på den räta linjen $y=kx$. Visa, att geometriska orten för ändpunkterna av parabelns parameter utgöres av två räta linjer. Bestäm därefter, för vilket värde på k vinkeln mellan dessa linjer är 30°.
4. I en ellips drages en korda från lillaxelns ena ändpunkt genom en av brännpunkterna. Bestäm ellipsens excentricitet, då den diameter, som halverar kordan, bildar så stor spetsig vinkel som möjligt med ellipsens storaxel.
5. Undersök kurvan $y=\frac{x^3}{1+x^3}$ med avseende på maximi-, minimi- och inflexionspunkter samt asymptoter, och upprita kurvan i dess huvuddrag. Undersök därefter och åskådliggör grafiskt, hur ytan av en rektangel varierar, som har ett hörn på kurvan och två sidor längs kurvans asymptoter.
6. Två cirklar med radierna R och r ha samma medelpunkt. En rektangel är så belägen, att en av dess sidor är korda i den ena cirkeln och den motstående sidan korda i den andra cirkeln. Bestäm rektangelns sidor, då dess yta är så stor som möjligt.
7. Bestäm eventuella maximi- och minimipunkter till kurvan $y=(x-\frac{1}{2}\pi)\cos x$ inom intervallet $0\leqq x\leqq 2\pi$, och upprita kurvan inom detta intervall.

Resultat: **1.** 153,44°. **2.** $27x+y+32=0$. — Om punkterna äro A, B, C, delar den sökta linjen t. ex. AB och AC i förh. 1:2 och 1:3 resp. **3.** $y=(k\pm 1)x$; $\pm\sqrt[4]{12}$. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. **5.** Max. och min. saknas; infl. i (0; 0) och i $(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4};\ \frac{1}{3})$; $x+1=0$ och $y-1=0$ äro asymptoter. y växer från 1 till $+\infty$, när x växer från $-\infty$ till -1, växer sedan från $-\infty$ till 0 och vidare till 1, när x växer från -1 genom 0 till $+\infty$. Ytfunktionen (Y) är $1:(x^2-x+1)$, där x är abskissan för en punkt på den givna kurvan. Ur $Y=1:[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]$ synes, att den är symmetrisk med avs. på $x=\frac{1}{2}$. Ytan växer från 0 till $\frac{1}{3}$, då x går från $-\infty$ till -1 (en oegentlig rektangel i denna punkt), växer sedan till $\frac{4}{3}$ för $x=\frac{1}{2}$ och avtar sedan till 0 för $x=+\infty$. **6.** $\sqrt{R^2+r^2}$ och $2Rr:\sqrt{R^2+r^2}$. — Om v är vinkeln mellan två radier, R och r, till ändpunkterna av en rektangelsida, som ej är korda, så är rektangelns yta $=2Rr\sin v\leqq 2Rr$. **7.** y växer från $-\frac{1}{2}\pi$ för $x=0$ till max.$=0$ för $x=\frac{1}{2}\pi$, avtar sedan till min.$=-1{,}82$ för $x=3{,}60$, passerar växande värdet 0 för $x=1{,}5\pi$ för att anta värdet $1{,}5\pi$ för $x=2\pi$; $y'=0$ ger $\cot x=x-\frac{1}{2}\pi$, som löses grafiskt. $y''=0$ ger $2\operatorname{tg} x=-(x-\frac{1}{2}\pi)$, som visar, att infl. föreligger i 1:a, 2:a och 4:e

kvadranterna. — Man kan även sätta $x-\frac{1}{2}\pi=z$, då $y=-z\sin z$, varur genast avläses, att den nya y-axeln ($x=\frac{1}{2}\pi$) är symmetriaxel och att det nya origo ($\frac{1}{2}\pi$; 0) är max.punkt.

Uppgifter i fysik

1. En cyklist ville veta, hur stor effekt han förbrukade, då han cyklade på horisontell väg med sin vanliga hastighet. Han fann, att han vid ordinärt väglag på en sträcka av 100 meter i genomsnitt använde 20 sek samt att cykeln utan särskild bromsning stannade 15 sek efter det han slutat trampa. Beräkna med en decimal effekten i hästkrafter, om personens och cykelns sammanlagda vikt är 90 kg.
2. Golvet i ett rum håller på att slipas. På den oslipade delen av golvet står en möbel, vägande 100 kg. Den vilar på 4 fötter, A, B, C och D, vilka ligga i hörnen av en rektangel. AB=CD=2,0 m. Möbelns tyngdpunkt ligger lodrätt över nämnda rektangels mittpunkt. Genom ett rep, som är fäst vid möbeln i en punkt 5 dm lodrätt ovanför BC:s mittpunkt och som i ett vertikalplan, vinkelrätt mot BC, bildar 45° vinkel snett uppåt med horisontalplanet, släpas möbeln med konstant hastighet parallellt med riktningen AB från den oslipade till den slipade golvdelen. Hur mycket mindre blir den för släpningen erforderliga kraften, då alla fyra fötterna ha kommit över på den slipade golvdelen, än då endast de två främsta ha gjort det? Friktionskoefficienten på den oslipade delen är 0,6, på den slipade 0,4. Schematisk figur över de krafter, som påverka möbeln, erfordras.
3. För att bestämma specifika värmet för paraffinolja hällde man 320 g av vätskan i en termosflaska och sänkte ned däri en motståndsspiral på 45 ohm, en termometer samt en omrörare. Spiralen anslöts under 300 sek till ett likströmsbatteri med spänningen 39,2 V. Oljans temperatur steg därvid 11,8°. Flaskans, motståndsspiralens, termometerns och omrörarens sammanlagda »vattenvärde» hade förut bestämts till 40 cal/grad. Beräkna paraffinoljans specifika värme.
4. På en plan, horisontell metallspegel lägges en planparallell, 1,80 mm tjock glasplatta. Ett svagt förstorande mikroskop, vars tub kan förskjutas i vertikal led, placeras över plattan och inställes så, att ett litet märke på plattans övre yta skarpt avtecknas i synfältet. För att sedan kunna i mikroskopet se märkets spegelbild måste man minska mikroskopets avstånd till glasplattan med 2,36 mm. Beräkna härav glasets brytnings-

exponent. Figur med enkel men tydlig strålgång erfordras. Från strålgången i mikroskopet kan dock bortses.

5. På en optisk bänk äro i ordning uppställda en punktformig ljuskälla, en vit skärm med ett cirkelrunt hål av diametern 10 mm samt en konvex spegel med sin speglande yta vänd mot skärmen. Ljuskällan och hålets centrum ligga på spegelns huvudaxel. På skärmens mot spegeln vända sida uppkommer genom reflexion av det genom hålet infallande strålknippet en ljus cirkelring. Då avståndet mellan ljuskällan och spegeln är 100 cm och mellan skärmen och spegeln 40 cm, blir ringens yttre diameter 30 mm. Beräkna härav spegelns brännvidd. Ljusknippet, som träffar spegeln, får anses vara centralt. Figur med enkel men tydlig strålgång erfordras.
6. En voltmeter A kopplades i serie med ett obekant motstånd B till en väggkontakt med spänningen 220 V. Voltmetern visade därvid 100 V. Parallellt med B anslöts därefter ett motstånd på 2000 ohm. Voltmetern visade nu 149 V. Beräkna härav voltmeterns motstånd. Kopplingsschema erfordras.
7. En elektromagnet för skolbruk har två seriekopplade spolar med vardera 4,0 ohms motstånd. De bruka normalt matas med en ström av 4,0 A. Man kopplar därvid de båda ändarna A och B av ett skjutmotstånd om 100 ohm till likströmsnätet, där spänningen är 120 volt. Därefter anslutes magnetens ena polskruv D till A och den andra, E, över en amperemeter till en på skjutmotståndet befintlig släpkontakt C, som flyttas, till dess amperemetern visar 4,0 amp. Hur många procent av den från nätet uttagna energien förloras i form av värme i skjutmotståndet? Till anslutningstrådarnas och amperemeterns motstånd tages ingen hänsyn. Kopplingsschema med strömpilar erfordras.
8. Ett järnvägståg är på väg söderut någonstans i Europa. Banan är först horisontell och tågets hastighet 60 km/tim. Senare kommer tåget till en stigning, där banans plan bildar 4,5° vinkel med horisontalplanet. Denna stigning passeras med hastigheten 36 km/tim. På båda ställena är det jordmagnetiska fältets inklination 71,0°. Beräkna förhållandet mellan de elektriska spänningar, som jordmagnetismen inducerar mellan ändarna av en hjulaxel i de båda fallen. Banans riktning antages ligga i det magnetiska meridianplanet, och hjulaxeln antages horisontell. Figur erfordras.

Resultat: 1. 0,2 hk. 2. $1200\sqrt{2} : 203 \approx 8{,}4$ kp. 3. 0,526 cal/gram · grad. 4. 1,53. 5. −100 cm. 6. 2530 ohm. 7. 76 %. 8. Förhållandet $= 60 \cdot \sin 71° : 36 \cdot \sin (71° - 4{,}5°) = 1{,}72$.

Nya Fysikböcker

* Samtliga förlagets *läroböcker i fysik för realskolan,* andra årskursen, har omarbetats efter de nya kursplanerna och har alla godkänts av Statens läroboksnämnd. För utsändning i september föreligger:

A. Beckman—T. Wetterblad, **Fysik II.** Pris inb. kr. 3:80

C. G. Hellsten—A. Frendel, **Experimentell fysik och astronomi II.** Pris häft. kr. 3:90

Ivar J:son Malmborg, **Övnings- och lärobok i fysik II.** Pris häft. 2:60

** För *laborationsövningarna i realskolan* fortsättes utgivningen av

G. Almkvist—E. Knave, **Laborationer,** med del II, avsedd för klass 3^5 och 2^4, och behandlande allmän fysik och värmelära. Pris häft. kr. 1:95. Godkänd av Statens läroboksnämnd.

*** För *realgymnasiet* föreligger nu

E. Almén—B. Nilsson, **Fysikaliska problem.** Pris häft. kr. 4:55

Därmed har Emil Alméns välkända problemsamling omarbetats och aktualiserats av lektor *Bengt Nilsson.* Godkänd av Statens läroboksnämnd.

SVENSKA BOKFÖRLAGET

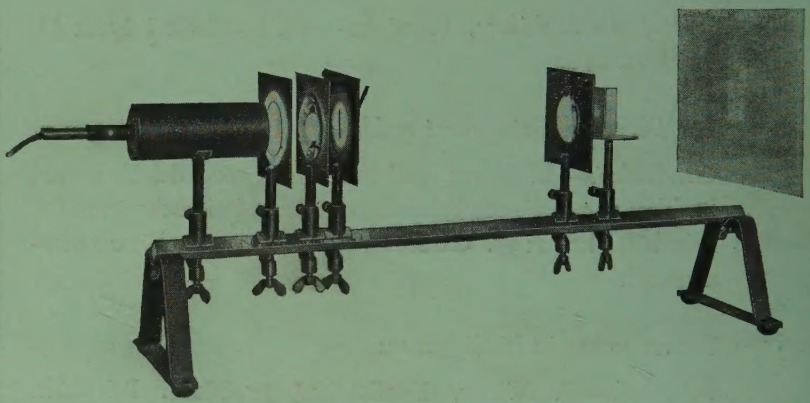
Utställning · Lärarexemplar · Rekvisitioner

Skolbokcentralen

David Bagaresgata 20 Stockholm
Telefon 21 82 22, postgiro 55 160

Med Norstedts experimentsats för optik

kan alla demonstrationsförsök utföras, som ingår i folkskolans och realskolans kurs. En utförlig handledning med avbildningar gör att försöken är mycket lätta att utföra och ej kräver någon tidsödande förberedelse.



Demonstration av spektrum med delar ur experimentsatsen.

Pris för experimentsatsen inkl. specialinredd förvaringslåda av trä kronor 285:—

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen - Box 898 - Stockholm

Lund 1952, Håkan Ohlssons Boktryckeri